**Fizikinės kinetikos uždaviniai**

1. Kiek skirtingų žodžių (nebūtinai prasmingų) galima parašyti perstatant raides žodyje „STALAS“?

2. Loterijoje iš 25 sunumeruotų rutuliukų atsitiktinai atrenkami 5 rutuliukai. Kokia tikimybė atspėti visus penkis numerius, kai
   a) neatsižvelgiama į rutuliukų atrinkimo tvarką?
   b) atsižvelgiama į rutuliukų atrinkimo tvarką?

3. Kokia tikimybė, kad iš keturių žaidimo kauliuko metimų serijos bent vieną kartą iškris 6 taškai?

4. Aviakatastrofos tikimybė $p$=$10^{-5}$. Tarkime, kad žmogus vidutiniškai skrenda 5 kartus per metus. Kokia tikimybė žūti aviakatastrofoje per 80 gyvenimo metų?

5. D’Merė paradoksas.
   a) Mėtant kartu du žaidimo kauliukus iškritusių taškų suma yra tarp 2 ir 12. 9 ir 10 taškų galima gauti dviem būdais:
      9 = 3+6 = 4+5
      10 = 4+6 = 5+5

   Kodėl 9 pasirodo dažniau negu 10 ?
   b) Mėtant kartu tris žaidimo kauliukus 9 ir 10 galima gauti šešiais būdais:
      9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3
      10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3

   Kodėl 10 pasirodo dažniau negu 9?

6. Mūsų pažįstamų šeimoje yra du vaikai.
   a) Kokia tikimybė, kad abu vaikai yra berniukai, jeigu žinome, kad vienas iš jų yra berniukas?
   b) Kokia tikimybė, kad abu vaikai yra berniukai, jeigu žinome, kad vyresnis vaikas yra berniukas?
   c) Kokia tikimybė, kad abu vaikai yra berniukai?

7. (Žaidimų teorijos paradoksas) 1928 m. von Neumanas, žaidimų teorijos pradininkas, įrodė vadinamąją minimakso teoremą – pagrindinį žaidimo teorijos teiginį. Ši teorema kilo nagrinėjant tokį paradoksalų žaidimą. Du žaidėjai L ir N kartu išmeta vieną arba du pirštus. Jeigu bendras išmestų pirštų skaičius yra lyginis, tai L moka N, o jeigu nelyginis, tai N moka L. Mokama suma litais lygi išmestų pirštų sumai. Daugelis mano, kad šis žaidimas yra sąžiningas, t.y., daug kartų sulošus šį žaidimą vidutinis kiekvieno iš žaidėjų pelnas bus lygus nuliui. Iš tikrųjų, yra du variantai, kai L moka N du arba keturis litus (sumoje 6 Lt) ir du variantai, kai N moka L tris litus (sumoje taip pat 6 Lt). Ar tikrai šis žaidimas yra sąžiningas?

8. (Gimtadienio paradoksas) Jeigu kambaryje yra 366 žmones tai tarp jų bus bent du žmones su sutampančiais gimtadieniais (tariame, kad nėra keliamųjų metų, t. y. visuose metuose 365 dienos). Kiek turi būti mažiausiai žmonių kambaryje, kad tikimybė bent dviejų sutampančių gimtadienių viršytų 0.5? Kokia tikimybė, kad nebus sutampančių gimtadienių, kai kambaryje yra 40, 50, 100 žmonių?

9. Nors Jūs neturite jokių ligos simptomų, Jūsų gydytojas nori patikrinti Jus ar nesergate labai reta liga, kuria serga tik vienas iš 10000 jūsų amžiaus žmonių. Testo patikimumas yra 98 %. Tai reiškia, kad jeigu Jūs sergate, tai 98% patikrinimų atitiks teigiamą testo parodymą ir 2% – neigiamą. Taip pat tarsime, kad jeigu Jūs nesergate, tai 98% patikrinimų atitiks neigiamą testo rezultatą ir 2 %– teigiamą. Jūs sutikote pasitikrinti ir testas davė teigiamą rezultatą. Kokia tikimybė, kad Jūs sergate? Ar prasminga tikrintis?

10. (Neužbaigto žaidimo paradoksas) Du žaidėjai žaidžia sąžiningą žaidimą, kuriame laimėti abiejų šansai yra vienodi. Žaidėjai susitarė žaisti iki 6 pergalių, t.y. visą prizą laimės tas, kas pirmas išloš 6 partijas. Tarkime, kad žaidimas nutrūko, kai pirmas išlošė 5 partijas, o antras – 3. Kaip teisingai padalyti prizą?

11. Tikimybių erdvė sudaryta iš įvykių $A$ ir $B$ : $P(A)$ =3 /5, $P(B)$ = 2/3, $P(A \cup B) = 1$. Apskaičiuokite $P(A \cap B)$, $P(A|B)$ ir $P(B|A)$. Ar įvykiai $A$ ir $B$ nepriklausomi?

12. Atsitiktinio kintamojo $X$ tikimybės tankio funkcija yra:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0, \, kai \, |x| > 1/2 \\ 1, \, kai \, |x| \le 1/2 \end{cases}$$

Pakeiskite kintamąjį $Y = a\,tg(\pi X)$ ir nustatykite naujo kintamojo $Y$ tikimybės tankio funkciją.

13. Nustatykite charakteristinę Gauso skirstinio funkciją.

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left( -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right) \Rightarrow f_X(k) = \left\langle e^{ikx} \right\rangle = \int e^{ikx} P_X(x) dx = ?$$

14. Nustatykite pirmus keturis Gauso skirstinio momentus ir visus komuliantus.

15. Bendruoju atveju nustatykite sąryšius tarp pirmų trijų komuliantų ir momentų. Panaudoję praeito uždavinio rezultatus patikrinkite šiuos sąryšius Gauso skirstiniui.

16. Įrodykite, kad dviejų nepriklausomų dydžių sumos charakteristinė funkcija lygi tų dydžių charakteristinių funkcijų sandaugai, t.y.

$$X \Rightarrow P_X(x),\ f_X(k)$$
$$Y \Rightarrow P_Y(y),\ f_Y(k)$$
$$Z = X + Y \Rightarrow P_Z(z), \quad f_Z(k) = f_X(k) f_Y(k)$$

17. Atsitiktinai klaidžiojanti dalelė kiekviename žingsnyje gali pajudėti į dešinę su tikimybe $p$, arba į kaire su tikimybe $q$. Nustatykite tikimybę $P_N(x)$, kad po $N$ žingsnių ji nukeliaus atstumą $x$, kai elementarus žingsnio ilgis $\Delta = 1$. Pradiniu momentu dalelė yra taške $x = 0$. Suraskite vidutinį nuokrypį $\langle x \rangle$ nuo koordinačių pradžios. Kaip šis dydis priklauso nuo $N$ ?

18. Išspręskite praeitą (17) uždavinį riboje $N \to \infty, \tau \to 0, \Delta \to 0$, t.y. tariant, kad dalelės žingsnis Δ ir trukmę τ artėja prie nulio, o žingsnių skaičius – prie begalybės. Tarkite, kad dydžiai

$$\frac{\Delta^2}{2\tau} = D, \quad \frac{\Delta(p-q)}{\tau} = v, \quad N\tau = t$$

šioje riboje yra baigtiniai. Nustatykite diferencialinę lygtį tikimybės tankiui $P(y,t)$ ir išspręskite ją, kai $P_Y(y,0) = \delta(y)$. Čia $P(y,t)dy$ yra tikimybė, kad momentu $t$ dalelė yra intervale $[y, y+dy]$.

19. Brauno dalelė spyruokle pritvirtinta prie sienelės. Brauno dalelės masė $m$, spyruoklės stangrumo koeficientas $k$. Šios sistemos Lanževeno lygtis tokia:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + \Gamma(t)$$

arba

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \xi(t)$$

čia

$$2\gamma = b/m, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad \xi(t) = \Gamma(t)/m .$$

Lanževeno šaltinis yra baltas, δ – koreliuotas triukšmas:

$$\langle \xi(t) \rangle_\xi = 0, \quad \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle_\xi = q\delta(t_1 - t_2).$$

Brauno dalelė yra pusiausvyroje su skysčiu, todėl galioja šiluminės energijos tolygaus pasiskirstymo pagal laisvės laipsnius principas:

$$\frac{m\langle v_0^2 \rangle_T}{2} = \frac{k_B T}{2}, \quad \frac{k\langle x_0^2 \rangle_T}{2} = \frac{k_B T}{2}.$$

Čia laužtiniai skliaustai pažymėti indeksu $T$ reiškia (temperatūrinį) vidurkinimą pagal Brauno dalelės pradines sąlygas. Toliau tariame, kad Brauno dalelės pradinis greitis $v_0$ ir pradinė koordinatė $x_0$ yra statistiškai nepriklausomi dydžiai, $\langle x_0 v_0 \rangle_T = 0$.

a) Fiksuotoms pradinėms sąlygoms $x_0$, $v_0$ suraskite Lanževeno lygties sprendinį.

b) Suraskite greičių koreliacinę funkciją $\langle \langle v(t_1) v(t_2) \rangle_\xi \rangle_T$. Iš proceso stacionarumo sąlygos nustatykite Lanževeno šaltinio intensyvumą $q$.

c) Apskaičiuokite greičio spektrinį tankį $S_{vv}(\omega)$.

20. Išspręskite praeitą (19) uždavinį Furjė transformacijos metodu. Nustatykite šiuo metodu greičio spektrinį tankį $S_{vv}(\omega)$.

21. Nuoseklus LCR kontūras yra termostate, kurio temperatūra $T$. Apskaičiuokite srovės fliuktuacijų koreliacinę funkciją $\langle I(t_1) I(t_2) \rangle$ ir srovės spektrinį tankį $S_{II}(\omega)$.

22. Viena blusa šokinėja tarp dviejų šunų.
$a$ – tikimybė, kad blusa per laiką $\Delta t = 1$ peršoka nuo pirmo prie antro šuns ($1 \to 2$),
$b$ – tikimybė, kad blusa per laiką $\Delta t = 1$ peršoka nuo antro prie pirmo šuns ($2 \to 1$).

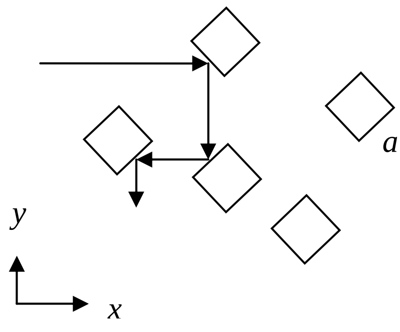
Užrašykite Markovo grandinės lygtį, nustatykite perėjimo matricos tikrines vertes bei kairiuosius ir dešiniuosius tikrinius vektorius. Suraskite Markovo grandinės sprendinį, kai pradiniu laiko momentu blusa yra ant pirmo šuns.

23. Išspręskite praeitą (22) uždavinį riboje $\Delta t \to 0$ tariant, kad $a=\alpha\Delta t$, $b=\beta\Delta t$ (parametrai $\alpha, \beta$ yra baigtiniai). Šioje riboje Markovo grandinės lygtį pakeiskite pagrindinę kinetinę lygtimi ir išspręskite ją.

24. Apskaičiuokite charakteringus oro parametrus esant normalioms sąlygoms, t.y. $p$=1Atm = 1.013x10$^5$ Pa, $T$ = 293 K.
    a) Apskaičiuokite vidutinį šiluminį oro molekulių greitį, tariant, kad oras sudarytas tik iš $N_2$ molekulių.
    b) Suraskite pilną kinetinę molekulių energiją, kurios yra kambaryje tūrio V = 10m x 4m x 25m = 1000 m$^3$. Kokiu greičiu torėtų važiuoti 1$t$ automobilis, kad turėtų tokią pačią kinetinę energiją.
    c) Apskaičiuokite charakteringą laiką $t_D$ per kurį $O_2$ molekulės nudifunduoja 10 m atstumą?

25. Apskaičiuokite diferencialinį ir integralinį sklaidos skerspjūvį nejudančios sferos, į kurią krenta taškinių dalelių pluoštas. Sferos spindulys yra $R$. Atspindys yra elastinis.

26. (Ehrenfestų vėjo ir medžių modelis) Panagrinėkite dvimatį kinetinį uždavinį aprašantį vėjo dalelių sklaidą ant atsitiktinai išmėtytų plokštumoje medžių. Tariame, kad medžių skerspjūvis yra taisyklingas kvadratas 45 laipsniais pasuktas horizonto atžvilgiu, taip kad vėjo dalelės gali judėti pastoviu greičiu (atspindys yra elastinis) tik griežtai į kairę, į dešinę, į viršų arba į apačią.




Pažymėkime:
$N$ – vėjo dalelių skaičius, $n=N/S$ – jų tankis, $S$ – plotas.
M – medžių skaičius, $m = M/S$ – jų tankis, $a$ – medžio skerspjūvio kraštinės ilgis.
$N_0$ – greičiu $v$ judančių į dešinę vėjo dalelių skaičius ($f_0 = N_0/N$ – santykinis skaičius, $n_0 = N_0/S$ – tankis),
$N_1$ – greičiu $v$ judančių į viršų vėjo dalelių skaičius ($f_1 = N_1/N$, $n_1 = N_1/S$),
$N_2$ – greičiu $v$ judančių į kairę vėjo dalelių skaičius ($f_2 = N_2/N$, $n_2 = N_2/S$),
$N_3$ – greičiu $v$ judančių į apačią vėjo dalelių skaičius ($f_3 = N_3/N$, $n_3 = N_3/S$)..
Tariame, kad medžių koncentracija nedidelė, $md^2$<<1.
a) Tariant, kad vėjo dalelės homogeniškai pasiskirstę erdvėje, kintamiesiems $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ užrašykite kinetinę lygtį.
b) Suraskite kinetinės lygties sprendinį ir Boltzmano H- funkcijos išraišką, kai pradinės sąlygos $f_0(0) = 1$, $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $f_3(0) = 0$.

c) Ar bendruoju atveju galioja Boltzmano H-teorema?
d) Kintamiesiems $n_i = n_i\ (x, y, t)$ užrašykite kinetinę lygtį atsižvelgiant į galimą vėjo dalelių nehomogeninį pasiskirstymą erdvėje.
e) Iš užrašytos kinetinės lygties išveskite vėjo dalelių tvermės lygtį.
f) Išveskite hidrodinaminę lygtį ir suraskite pernašos koeficientus.