

Chaos teorija ir jos taikymai



I DALIS: CHAOSO TEORIJA

II DALIS: CHAOSO TEORIJOS TAIKYMAI

I DALIS: Chaoso Teorija

- Įvadas

- **Lorenzo sistema**

Rimties taškai ir jų stabilumas, fazinio tūrio evoliucija

Eksponentinė artimų trajektorijų divergencija, prognozės trukmė

- **Dinaminių sistemų atraktorių klasifikavimas**

- **Kitos trečios eilės chaotinės sistemos**

Roesslerio sistema

Dufingo svyruoklė

- **Puankarė atvaizdai**

Henon'o atvaizdas

Fraktalai ir jų dimensija, Kantaro aibė

Lorenzo ir Roesslerio sistemos maksimumų pasikartojimų atvaizdai

- **Pirmosios eilės atvaizdai**

Atvaizdų rimties taškai ir stabilumas

Logistinis atvaizdas

Periodo dvigubėjimo bifurkacijos, Feigenbaumo dėsnis.

- **Šiuolaikinės chaoso tyrimo kryptys**

Išvadas

Kas yra dinaminis chaosas?

Dinaminiu chaosu vadinamas nereguliarus dinaminių sistemų elgesys.

Pagrindinė chaotinio elgesio savybė: *artimos trajektorijos fazinėje erdvėje eksponentiškai greitai prasiskiria (Drugelio efektas).*

Būtinės chaoso sąlygos – *netiesiškumas, >2 diferenc. lygtys*

Chaotinių sistemų pavyzdžiai:

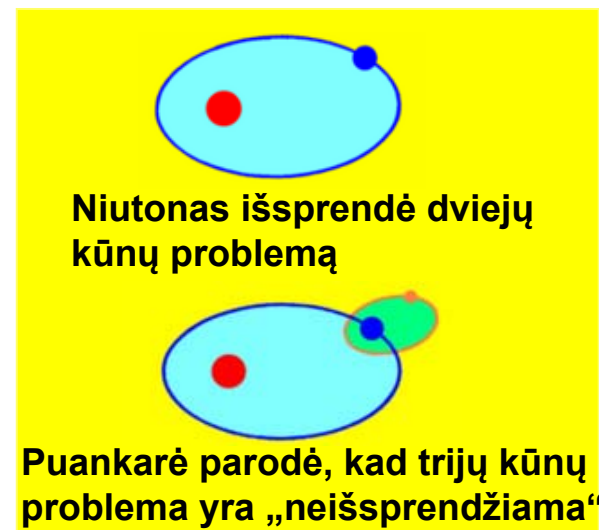
- Dviguba svyruoklė 
- Teniso rutuluko šokinėjimas ant periodiškai virpančios rakėtės  
- Hidrodinaminės ir aerodinaminės sistemos (turbulencija) 
- Ekonominės sistemos (pvz. Euro-Dolerio kursas) 
- Biologinės sistemos  
- Elektroninės, lazerinės, cheminės ir kt. sistemos
- Astronomija, pvz. Saturno palydovo Hiperono chaotinė trajektorija
- Sociologinės sistemos (pvz. anarchijos laikotarpiai)

Henri Puankarė ir trijų kūnų problema

- 1887 m. švedų karalius paskelbė konkursą, kuriame mokslininkams suformulavo klausimą „ar mūsų saulės sistema yra stabili?“
- Konkursą laimėjo prancūzų fizikas ir matematikas Puankarė (Henri Poincare).
- Puankarė nagrinėjo trijų kūnų problemą (tarkime Saulė, Žemė ir Mėnulis) ir parodė, kad judėjimas gali būti labai sudėtingas (šiuolaikine terminologija – “chaotinis”).
- Trijų kūnų judėjimo animacija  

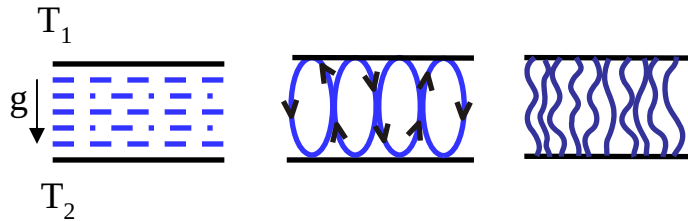


H. Poincare (1854 - 1912)



Lorenzo sistema

Benard'o nestabilumas

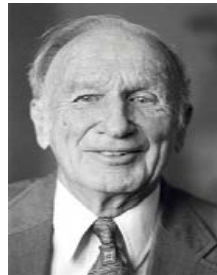


Skystis tarp dviejų plokštumų kaitinamas iš apačios. Didinant temperatūros gradientą iš pradžių atsiranda tvarkingas judėjimas cilindriniais sūkuriais, o po to – turbulencinis judėjimas.

Lorenz'o modelis (1963)

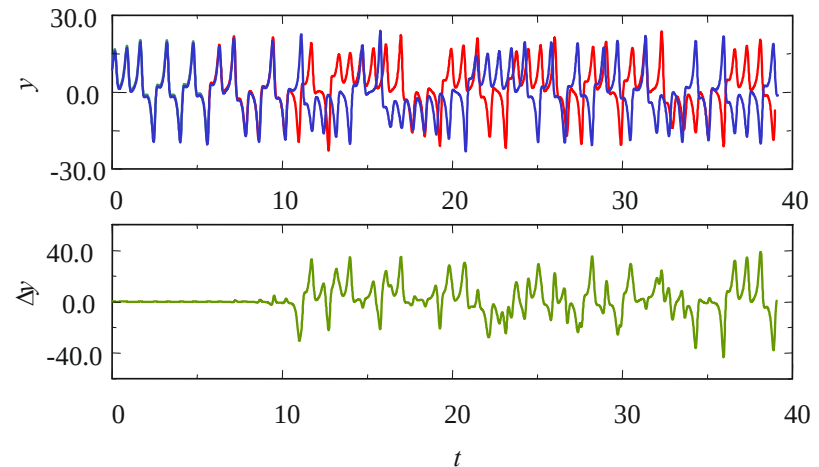
(šiuolaikinio chaoso mokslo pradžia)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$



E. N. Lorenz (1917-2008)

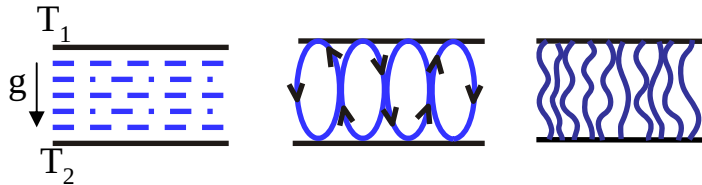
Drugelio efektas



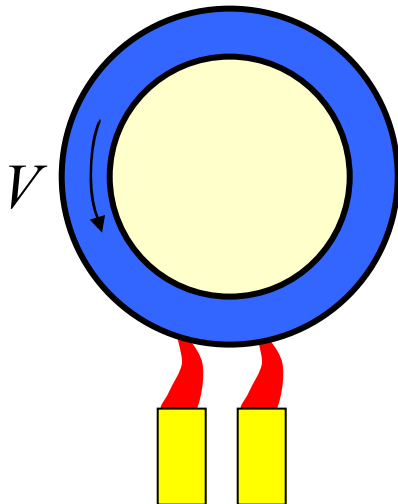
- Dėl nepaprasto jautrumo pradinėms sąlygoms **ilgalaikė oro prognozė neįmanoma**, net jeigu tiksliai žinomos orą aprašantis modelis. *Drugelio sparnų mostelėjimo pakanka sužlugdyti prognozę.*
- *Drugelio efekto animacija (matlab)*

Eksperimentinės sistemos, aprašomos Lorenzo lygtimis

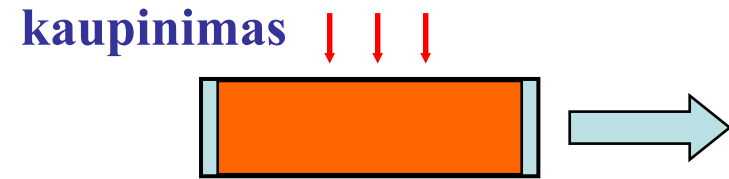
1. Benard'o nestabilumas



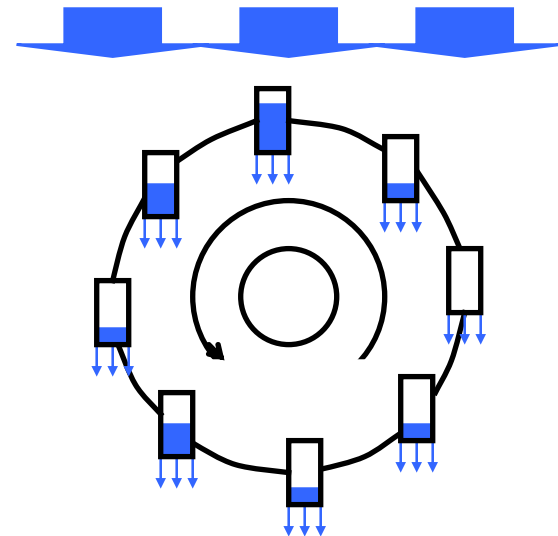
2. Skysčio konvekciija žiede



3. Vienamodis lazeris



4. Chaotinis vandens ratas



Paprastos Lorenzo sistemos savybės

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x) & s > 0 \\ \dot{y} &= rx - y - xz & r > 0 \\ \dot{z} &= xy - bz & b > 0\end{aligned}$$

Netiesiškumas: xz, xy

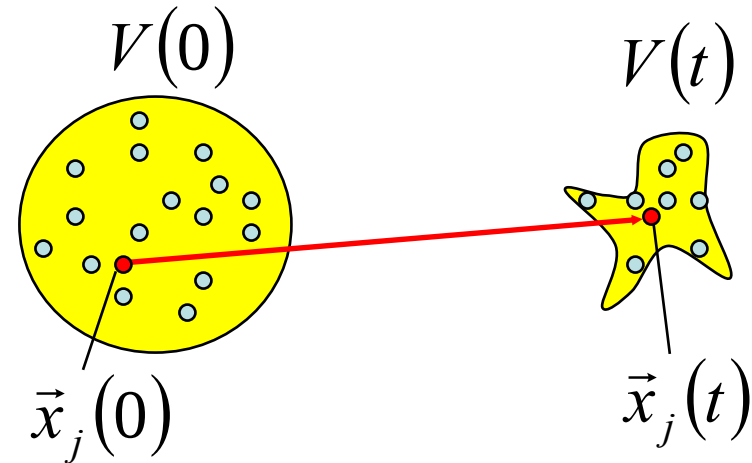
Simetrija:

Sistema invariantinė keitiniui

$$(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$$

jeigu $\{x(t), y(t), z(t)\}$ sprendinys,
tai $\{-x(t), -y(t), z(t)\}$ taip pat spr.

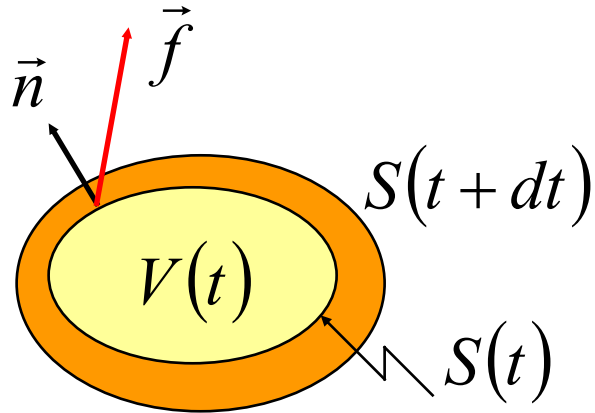
Fazinio tūrio susispaudimas:



$$\begin{aligned}V(t) &\rightarrow 0 \\ t &\rightarrow \infty\end{aligned}$$

***Disipatyvioji
sistema!***

Fazinio tūrio kitimo formulė



$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}(\vec{z}) \quad (\text{Čia } \vec{z} \text{ ir } \vec{f} \text{ yra trimačiai vektoriai})$$

$V(t)$ – sistemų ansamblio tūris momentu t .

$S(t)$ – paviršius, gaubiantis tūrį $V(t)$.

- Fazinio tūrio kitimą apsprendžia fazinių taškų, gulinčių paviršiuje $S(t)$, judėjimas. Apskaičiuojame tūrio pakitimą per trumpą laiką dt .

$$(\vec{f} \cdot \vec{n}) dt \{ \text{slab } dS \} \rightarrow \frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div } \vec{f} dV$$

$$\dot{V} = \int_V \text{div } \vec{f} dV$$

Lorenzo sistemos fazinio tūrio evoliucija

- Panaudosime gautą fazinio tūrio kitimo formulę Lorenzo sistemai.

$$\begin{array}{ll}
 \dot{x} = s(y - x) & s > 0 \\
 \dot{y} = rx - y - xz & r > 0 \\
 \dot{z} = xy - bz & b > 0
 \end{array}
 \quad (\text{Lorenzo sistemoje visi parametrai yra teigiami})$$

$$\dot{V} = \int_V \operatorname{div} \vec{f} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} [s(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy - bz]$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = -s - 1 - b < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = -(s + 1 + b)V$$

$$\boxed{V(t) = V(0) \exp[-(s + 1 + b)t]} \quad \Rightarrow \quad V(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Lorenzo sistema yra disipatyvioji !

Lorenzo sistemos rimties taškai

$$s(y-x)=0$$

$$rx-y-xz=0$$

$$xy-bz=0$$

$$y=x$$

$$x(r-1-z)=0$$

$$x^2-bz=0$$

$$O: (0,0,0)$$

$$C^+: (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$C^-: (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

Linearizavimas: $\delta \dot{\vec{x}} = A \delta \vec{x}$

$$A = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r-z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{pmatrix}$$

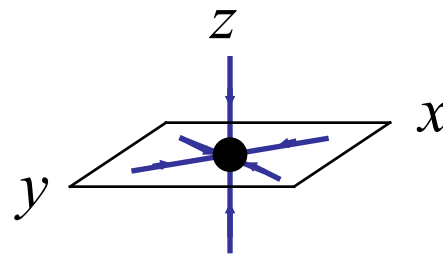
$$O: A = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

$$\delta \dot{z} = -b \delta z \Rightarrow \delta z = \delta z_0 \exp(-bt)$$

$$\begin{pmatrix} \delta \ddot{x} \\ \delta \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

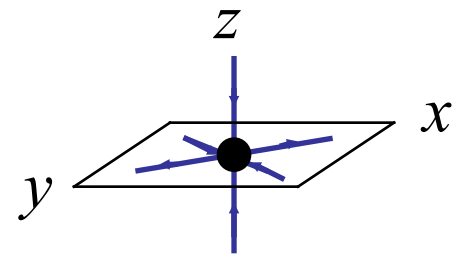
$$\sigma = -s-1$$

$$\Delta = s(1-r)$$



$$r < 1$$

*stabilus
mazgas*



$$r > 1$$

balnas

Lorenzo sistemos rimties taškai

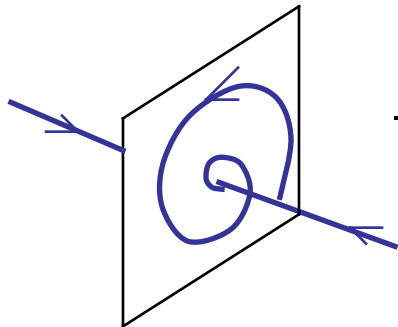
$C^+; C^- :$

$$A = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{b(r-1)} \\ \pm \sqrt{b(r-1)} & \pm \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} \quad \text{Charakteringoji lygtis:} \quad \det(A - I\lambda) = 0$$

$$\lambda^3 + (s + b + 1)\lambda^2 + (r + s)b\lambda + 2bs(r - 1) = 0$$

$$\operatorname{Re} \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = i\omega$$

$$\left. \begin{aligned} -(s + b + 1)\omega^2 + 2bs(r - 1) &= 0 \\ -\omega^3 + (r + s)b\omega &= 0 \end{aligned} \right\}$$

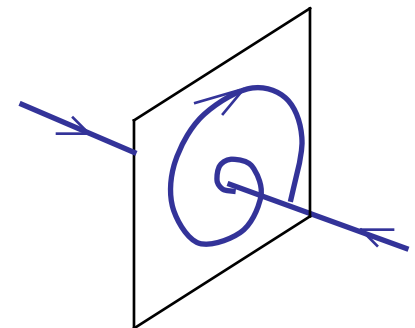


$$1 < r < r_H$$

stabilus
mazgas-spiralė

$$r_H = \frac{s(s + b + 3)}{s - b - 1}$$

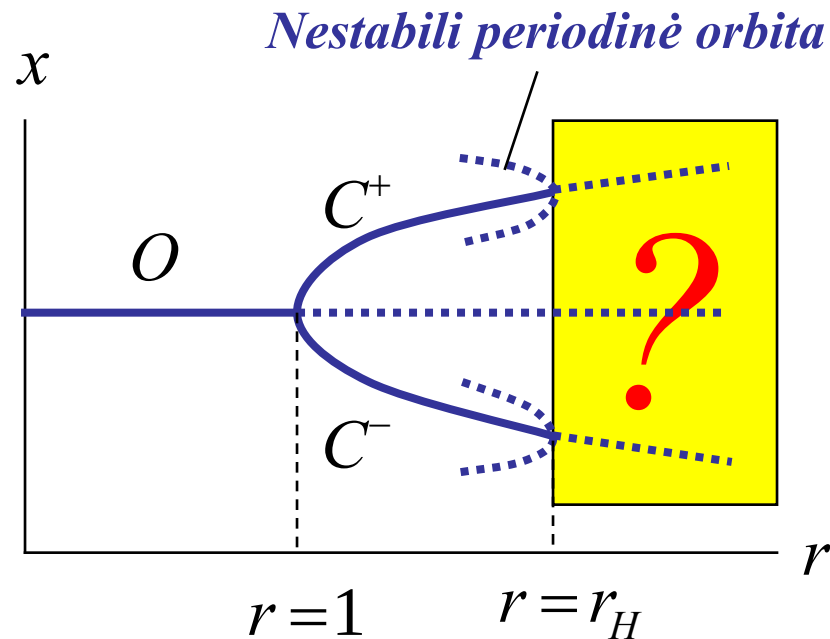
$$\omega_H^2 = (r_H + s)b$$



$$r > r_H$$

nestabilus
mazgas-spiralė

Bifurkacinė diagrama



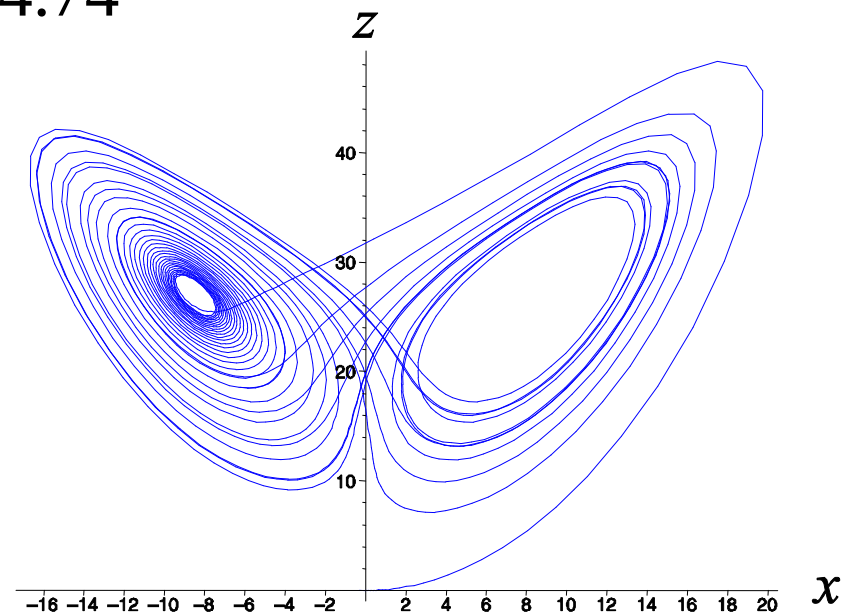
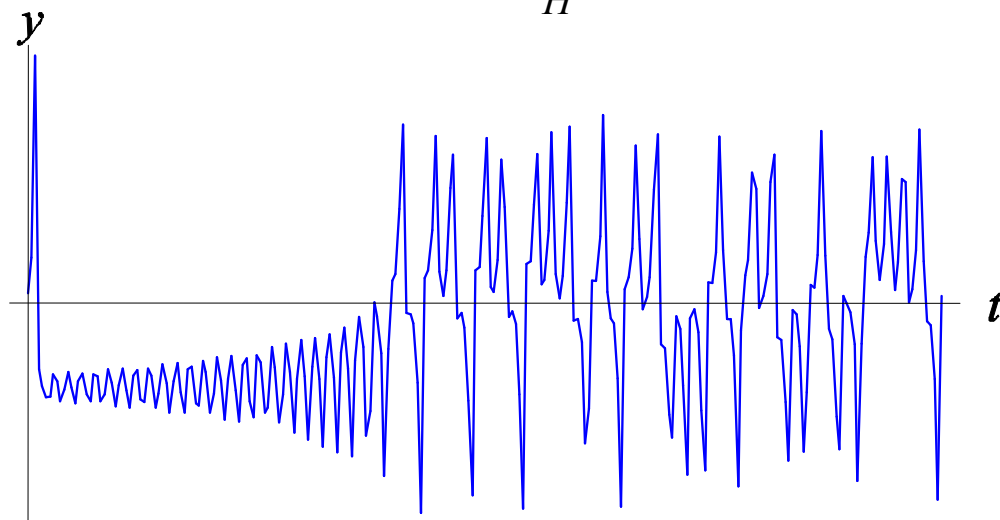
Kaip atrodys asimptotinis sistemos elgesys, kai $r > r_H$?

Kai $r > r_H$ sistemoje nėra stabilių rimties taškų ir stabilių periodinių orbitų, o fazinis tūris eksponentiškai mažėja ir virsta nuliu, kai $t \rightarrow \infty$!

Skaitmeniniai rezultatai

$$s = 10 \quad b = 8/3 \quad \longrightarrow \quad r_H \approx 24.74$$

$$r = 28 > r_H$$

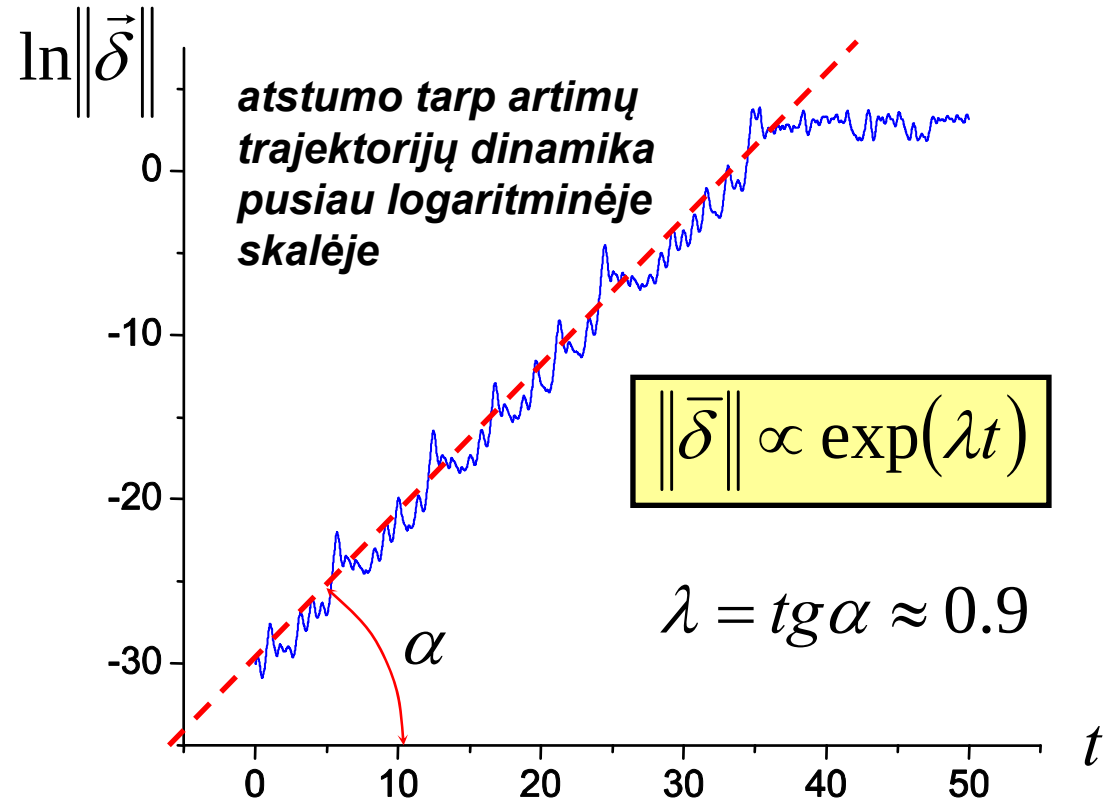
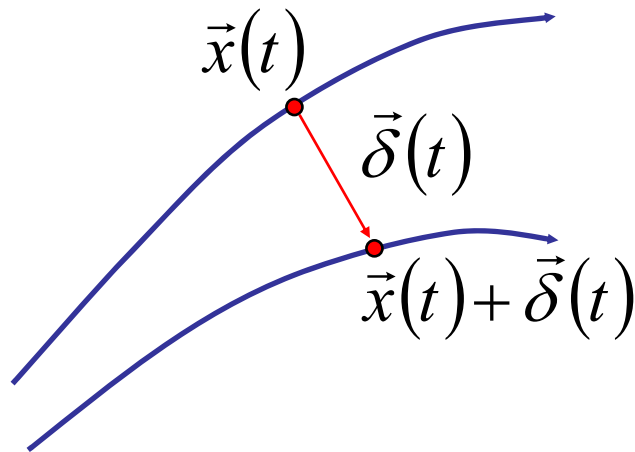


*Trajektorijos asimptotiškai artėja prie sudėtingos konfigūracijos **nulinio tūrio** geometrinio objekto. Tas objektas vadinamas **keistuoju atraktoriu**. Tai yra **fraktalas**, kurio **dimensija yra trupmeninė**. Šiuo atveju **dimensija** $d \approx 2.05$*

Eksponentinė artimų trajektorijų divergencija

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

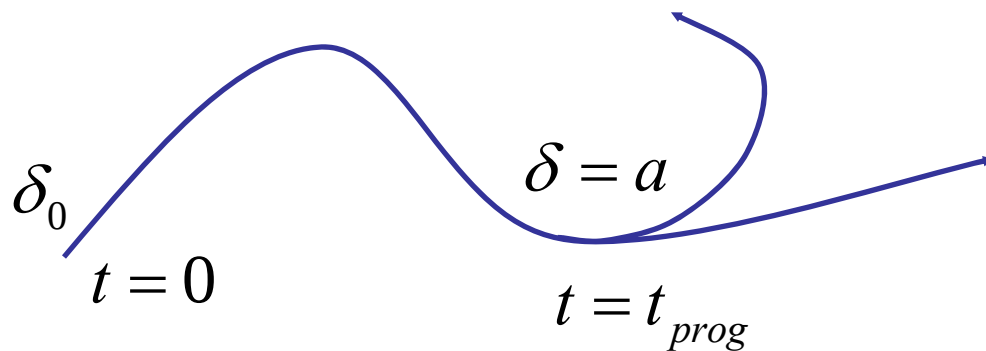
$$\vec{x} = (x, y, z)$$



λ - *Liapunovo rodiklis*

*Jeigu Liapunovo rodiklis teigiamas, tai turime chaosą!
Chaotinėse sistemose atstumas tarp artimų trajektorijų
fazinėje erdvėje diverguoja pagal eksponentinį dėsnį.*

Prognozės trukmė



δ_0 - pradinių sąlygų matavimo tikslumas

a - leistina prognozės paklaida

$$\delta(t) = \delta_0 \exp(\lambda t)$$

$$\delta(t_{prog}) = a$$

$$\delta_0 \exp(\lambda t_{prog}) = a$$

$$t_{prog} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\delta_0}$$

Pavyzdys: Tarkime, kad $a = 10^{-1}$, $\delta_0 = 10^{-3}$. Kiek pailgės prognozės trukmė, jeigu matavimo tikslumą pagerinsime keturiom eilėm iki $\tilde{\delta}_0 = 10^{-7}$?

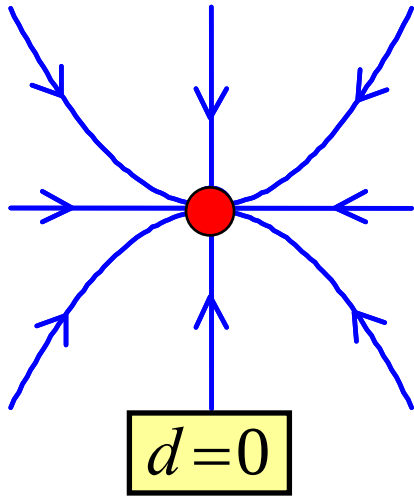
$$\frac{\tilde{t}_{prog}}{t_{prog}} = \frac{\ln a - \ln \tilde{\delta}_0}{\ln a - \ln \delta_0} = \frac{\ln 10^{-1} - \ln 10^{-7}}{\ln 10^{-1} - \ln 10^{-3}} = \frac{6}{2} = 3$$

Bet kokios pastangos gerinti matavimo tikslumą yra beprasmiškos!

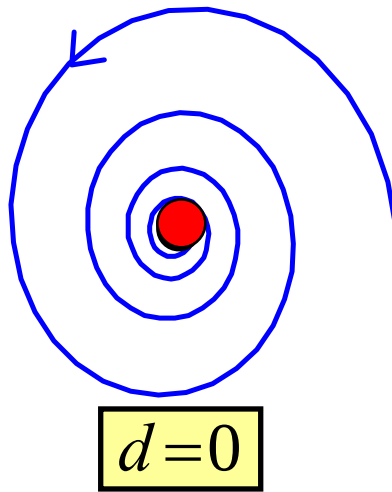
Nors chaotinės sistemos yra griežtai deterministinės, jų ateitį galima prognozuoti tik statistiškai.

Dinaminių sistemų atraktorių klasifikavimas

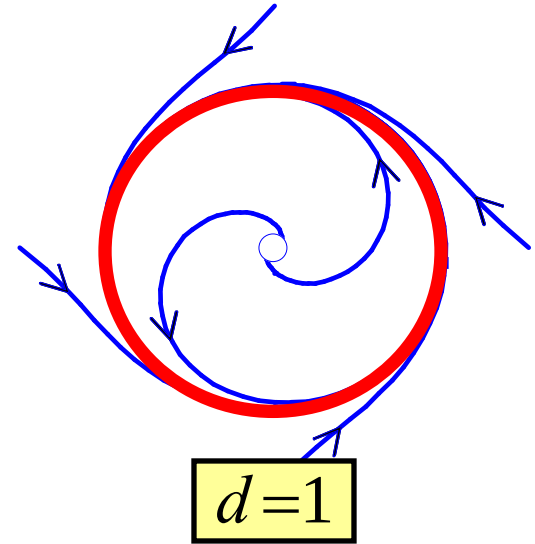
stabilus mazgas



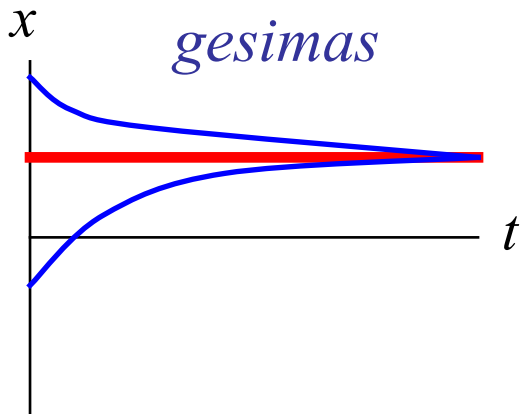
stabili spiralė



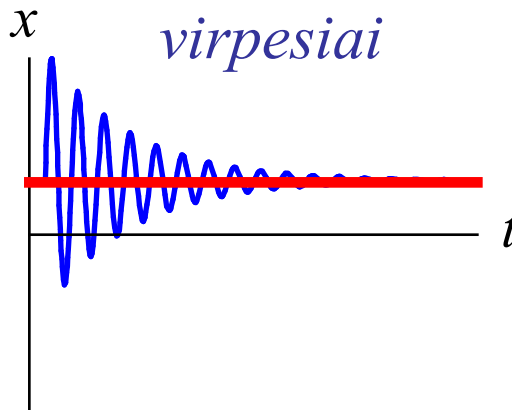
stabilus ribinis ciklas



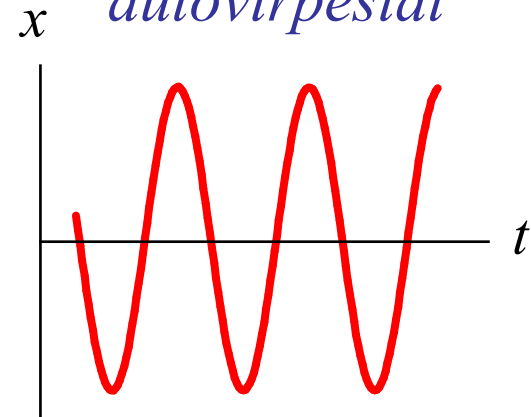
*eksponentinis
gesimas*



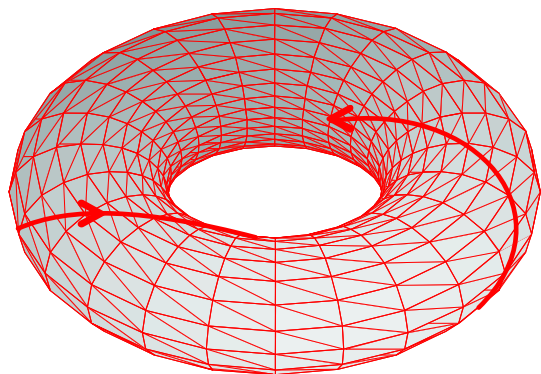
*gęstantys
virpesiai*



autovirpesiai

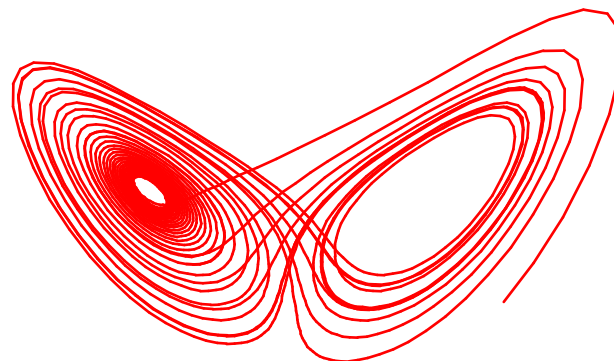


toras



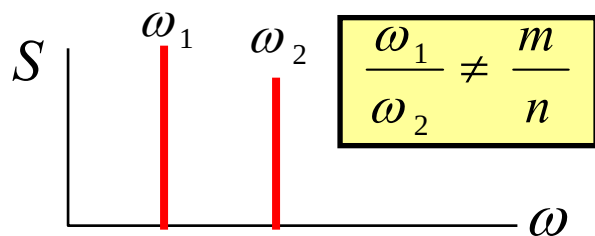
$$d=2$$

Keistasis atraktorius



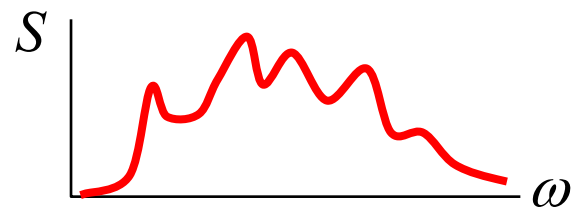
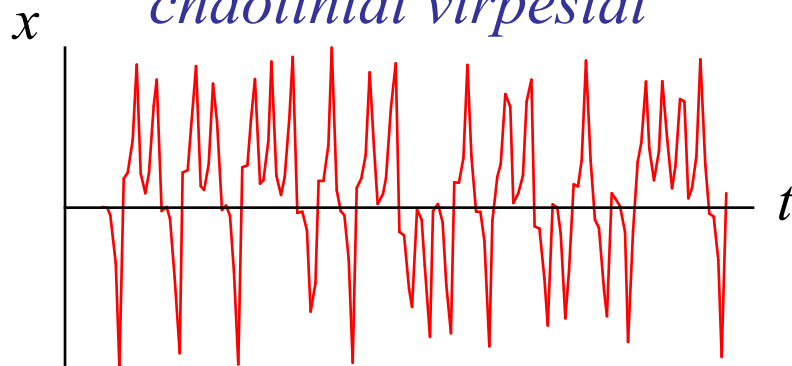
$$2 < d < 3$$

kvaziperiodiniai virpesiai



diskretinis spektras!

chaotiniai virpesiai



tolydinis spektras!

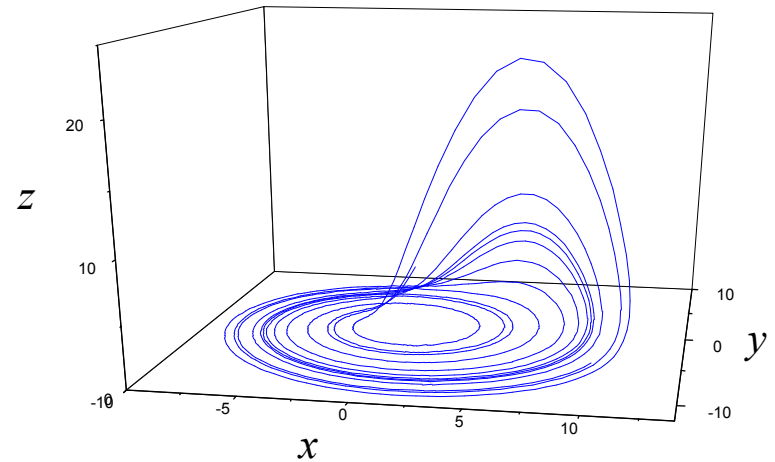
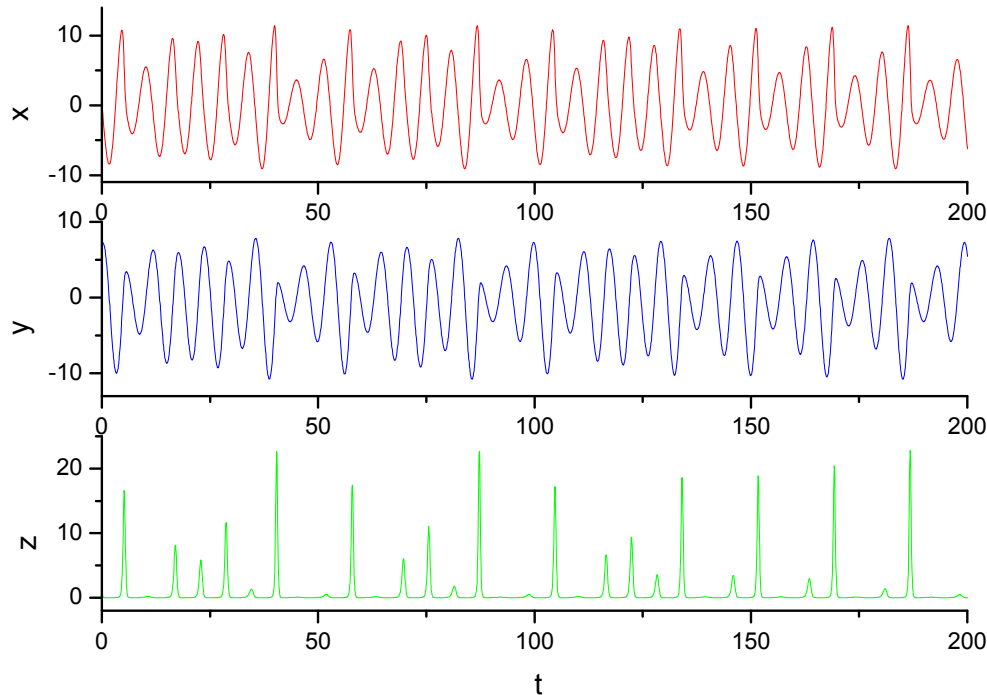
Kitos trečiosios eilės chaotinės sistemos

Rioslerio sistema

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = bx + z(x - c)$$



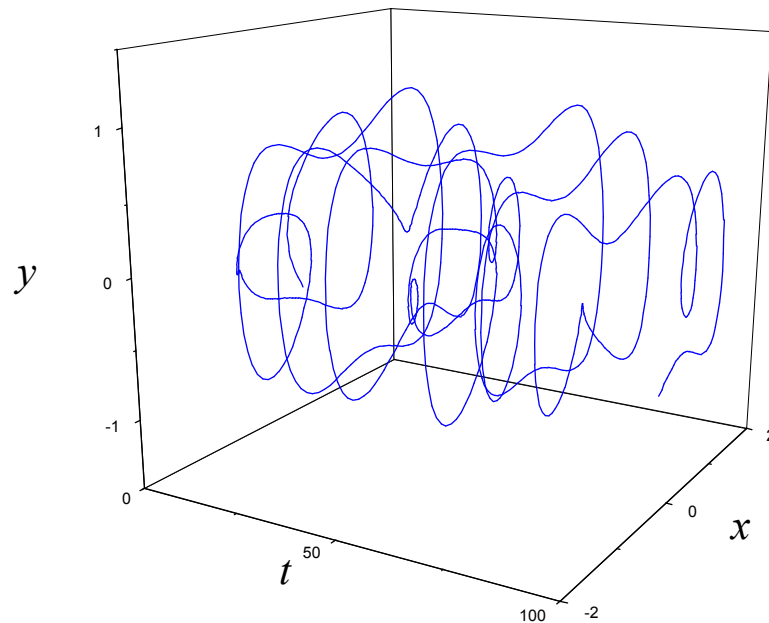
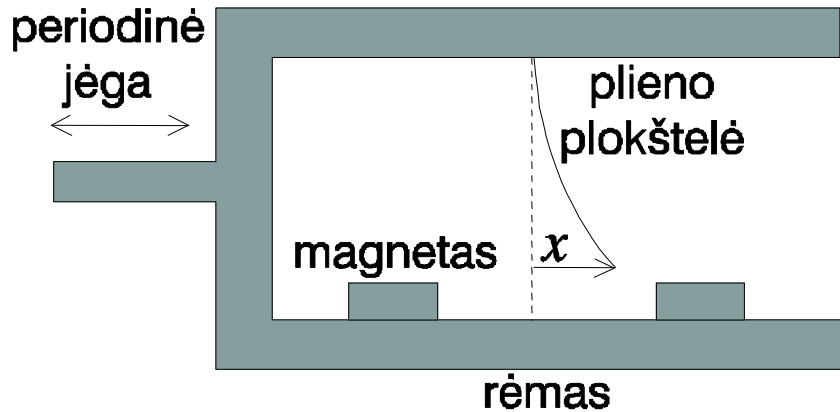
$$a = 0.2$$

$$b = 0.2$$

$$c = 5.7$$

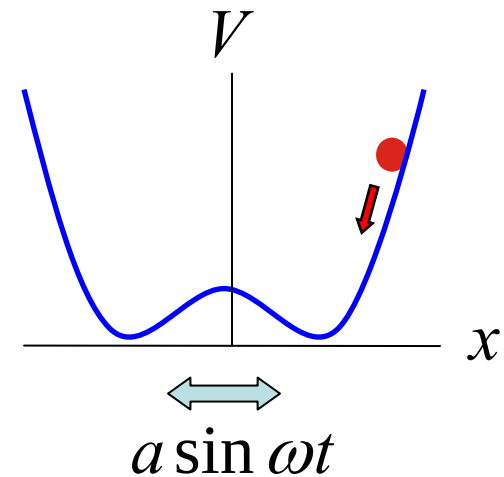
*Rioslerio sistema modeliuoja
cheminę reakciją*

Dufingo svyravimai



$$\ddot{x} = -\gamma \dot{x} - dV/dx + a \sin \omega t$$

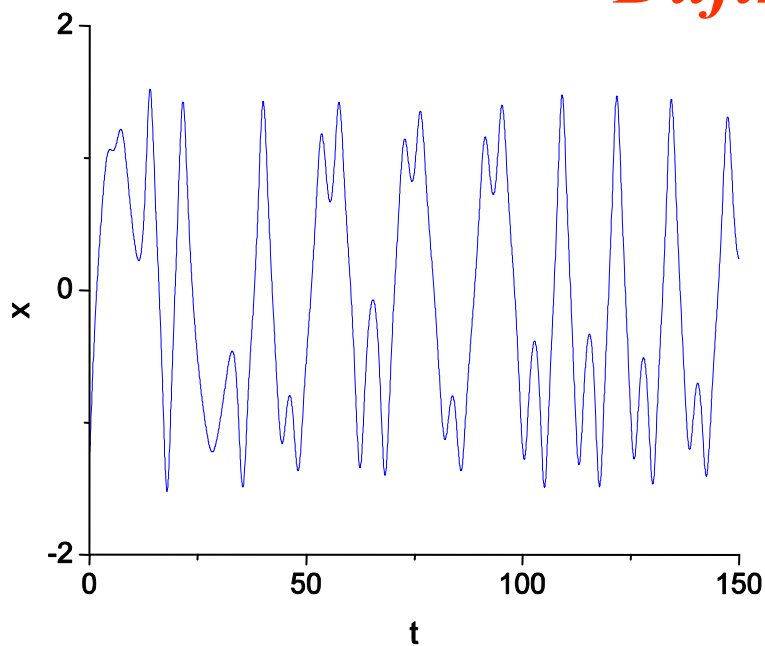
$$V(x) = -x^2/2 + x^4/4$$



$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -\gamma y + x - x^3 + a \sin \omega t$$

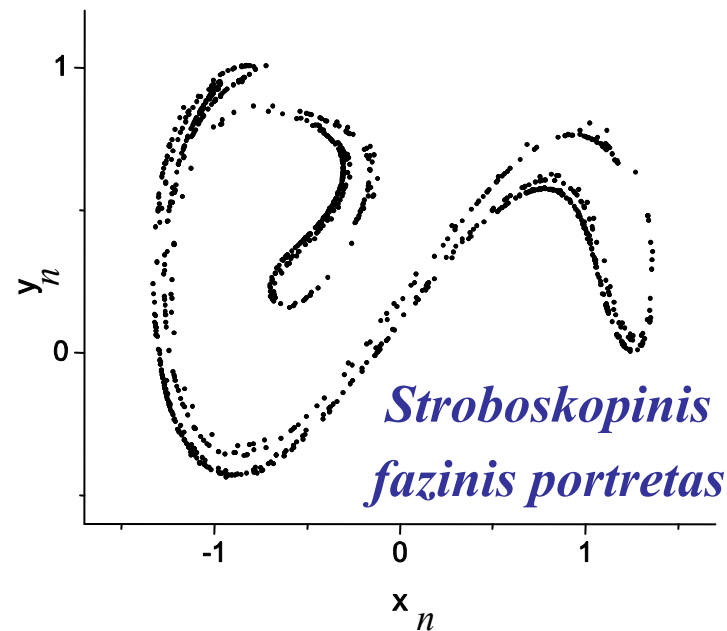
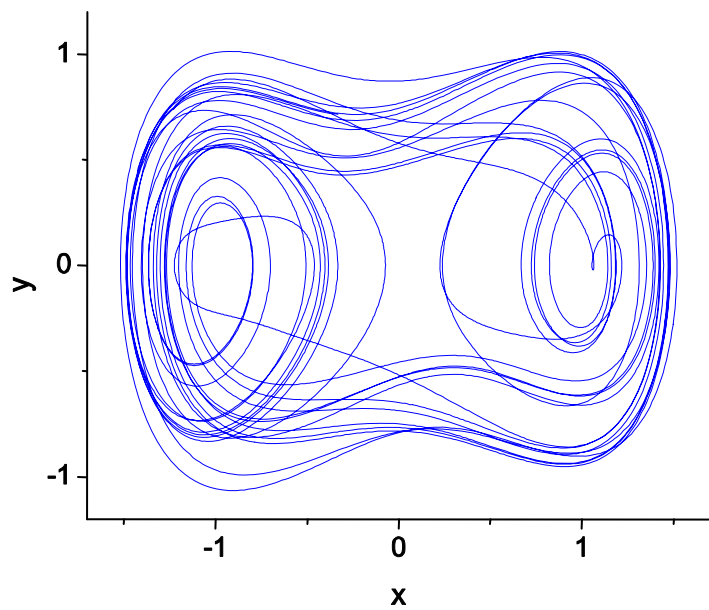
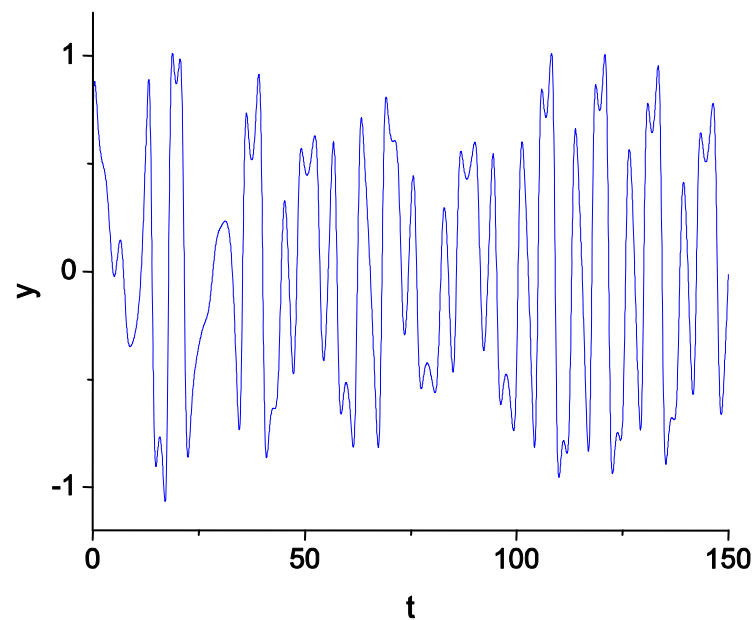
Dufingo svyruoklė



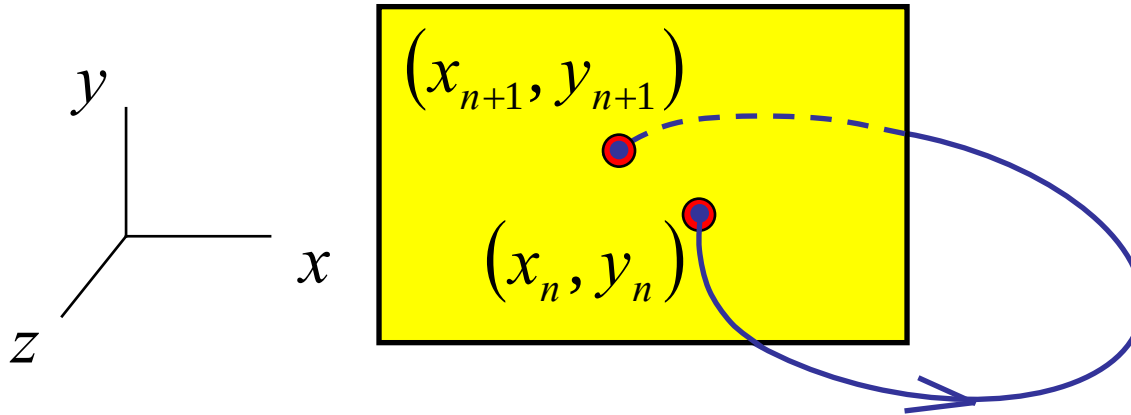
$$\gamma = 0.25$$

$$\omega = 1$$

$$a = 0.4$$



Puankarė atvaizdai



$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, z) \\ \dot{y} &= g(x, y, z) \\ \dot{z} &= h(x, y, z)\end{aligned}$$



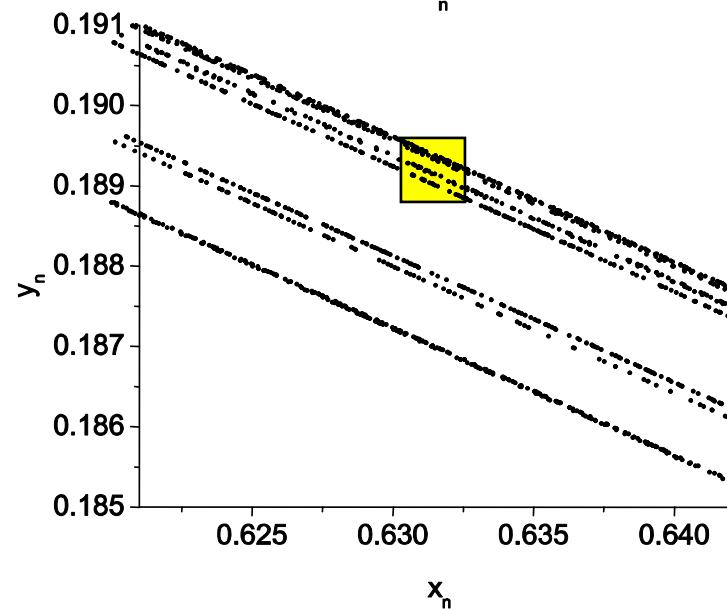
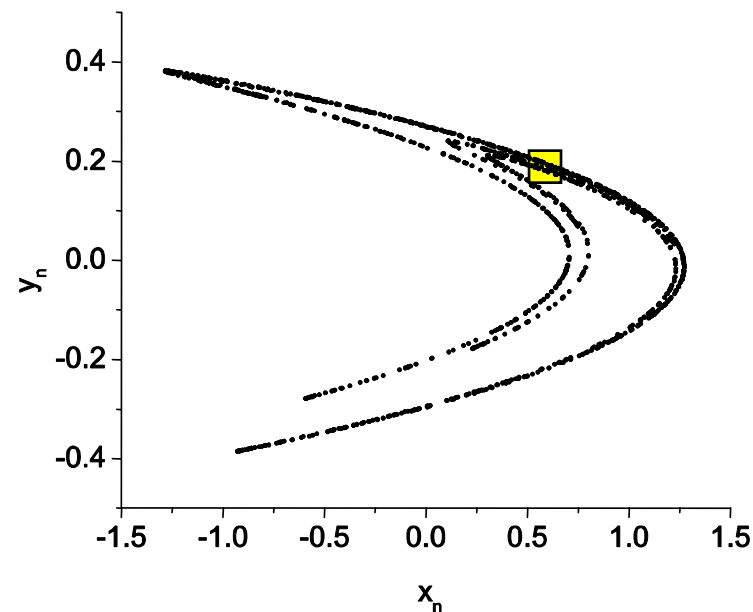
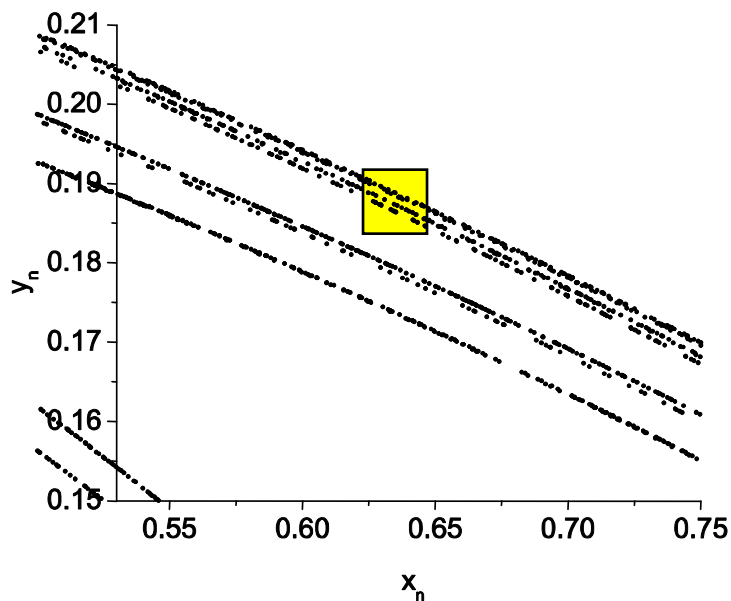
$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \psi(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= \varphi(x_n, y_n)\end{aligned}$$

Trečiosios eilės diferencialinių lygčių sistemą galima transformuoti į antrosios eilės skirtuminių lygčių sistemą!

Henono atvaizdas

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \quad \begin{aligned} a &= 1.4 \\ b &= 0.3 \end{aligned}$$

Atraktorius yra fraktalas!



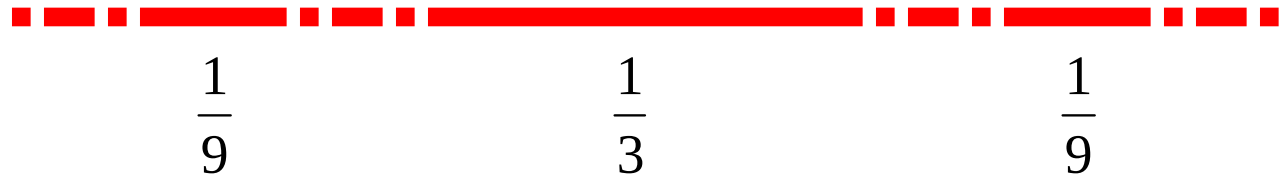
Paprastas fraktalo pavyzdys

1

Kantoro aibė:



*Išmestos
atkarpos*



Išmestų atkarpų ilgis:

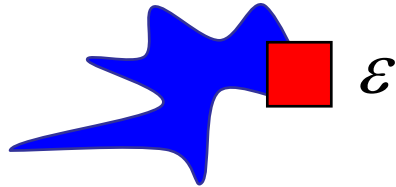
$$L = \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{9} + 4 \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 2/3} = 1$$

Kantoro aibės ilgis lygus nuliui!

Kaip charakterizuoti tokių objektų dimensiją?

Hausdorfo dimensija

tiriamas objektas

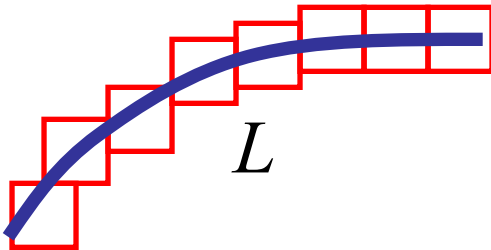


$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-d}$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

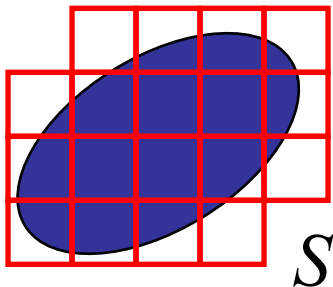
Koks yra mažiausias ε dydžio kvadratukų skaičius N , kuriais galima uždengti tiriamą objektą?

d - objekto dimensija



$$N \propto L / \varepsilon$$

$$d = 1$$



$$N \propto S / \varepsilon^2$$

$$d = 2$$

Kantoro aibės dimensija

	ε	N
	1	1
	1/3	2
	1/9	4
	1/27	8
	1/3 ⁴	2 ⁴

$$d = -\ln N / \ln \varepsilon = -\ln 2^k / \ln 3^{-k} = \ln 2 / \ln 3 < 1$$

Kantoro aibės dimensija yra trupmeninė!



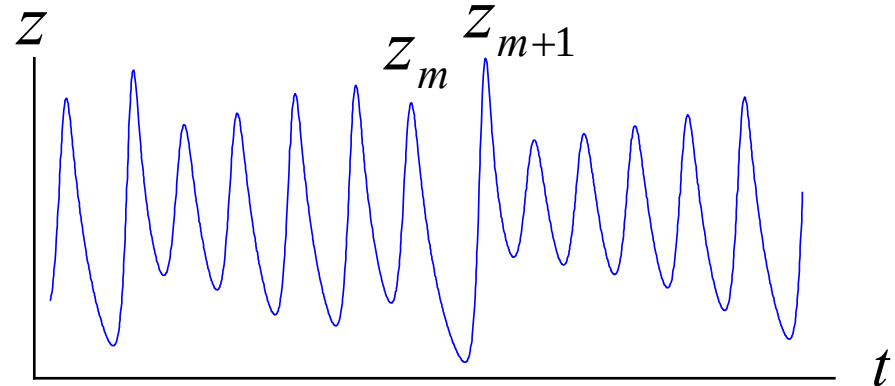
Maksimumų pasikartojimo atvaizdai

Dinaminio kintamojo maksimumų atvaizdo idėja priklauso Lorencui. Pirma kartą šią idėją jis pritaikė savo (Lorenco) sistemai.

$$\dot{x} = s(y - x)$$

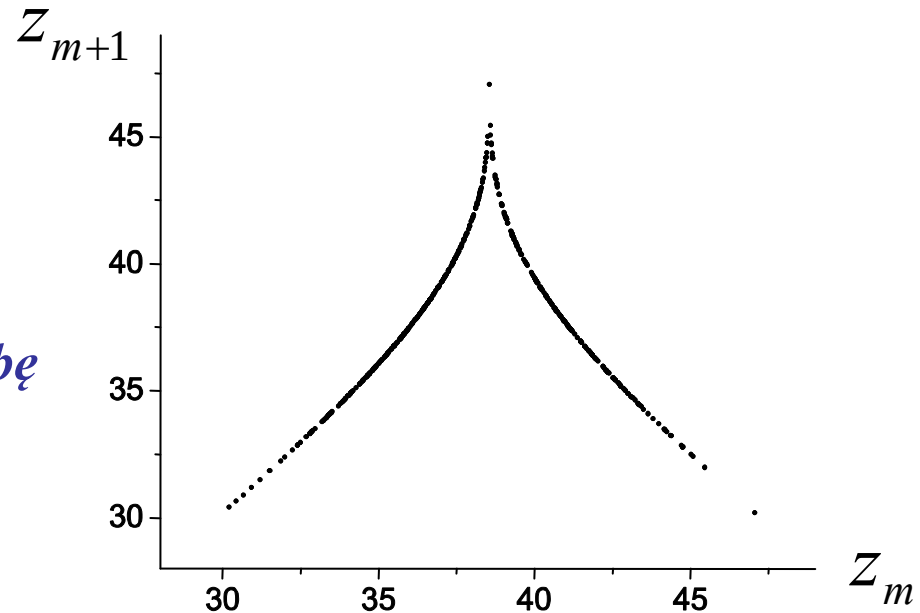
$$\dot{y} = rx - y - xz$$

$$\dot{z} = xy - bz$$



*Maksimumų
atvaizdas yra beveik
vienmatis!*

*Turint $z_{m+1} = f(z_m)$ priklausomybę
ir žinant m -ojo maksimumo vertę
galime nesunkiai prognozuoti
 $m+1$ -ojo maksimumo vertę.*

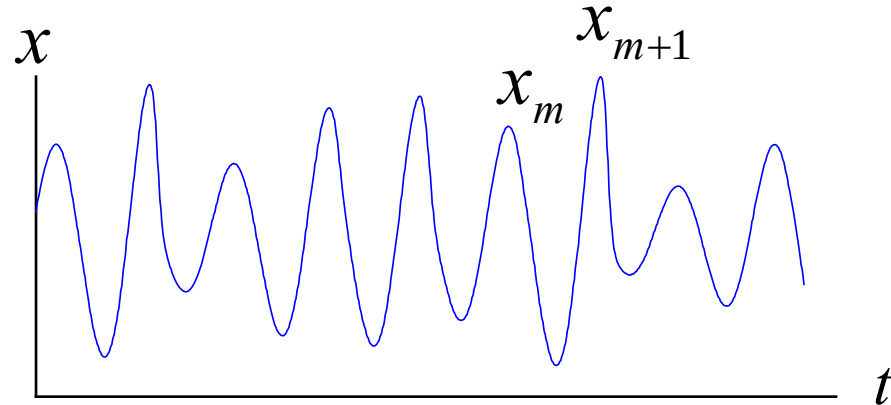


Rösslerio sistemos maksimumų atvaizdas

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = bx + z(x - c)$$

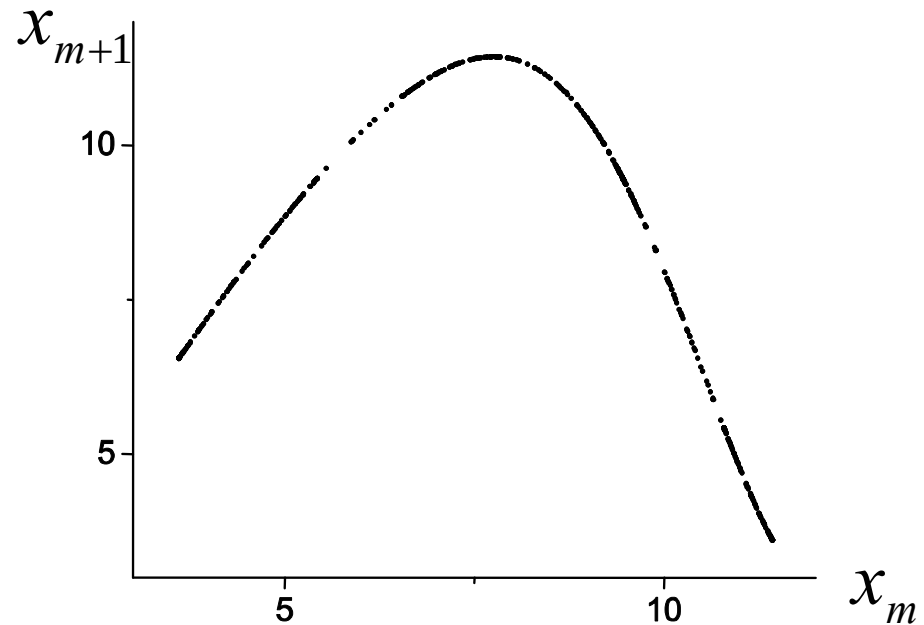


*Maksimumų
atvaizdas taip pat
beveik **vienmatis!***

*Daugelį trečiosios eilės chaotinių
sistemų galima apytiksliai aprašyti
negrįžtamais pirmosios eilės
atvaizdais $x_{m+1} = f(x_m)$.*

*Negrįžtamieji atvaizdai yra tokie,
kurių atvirkštinė transformacija*

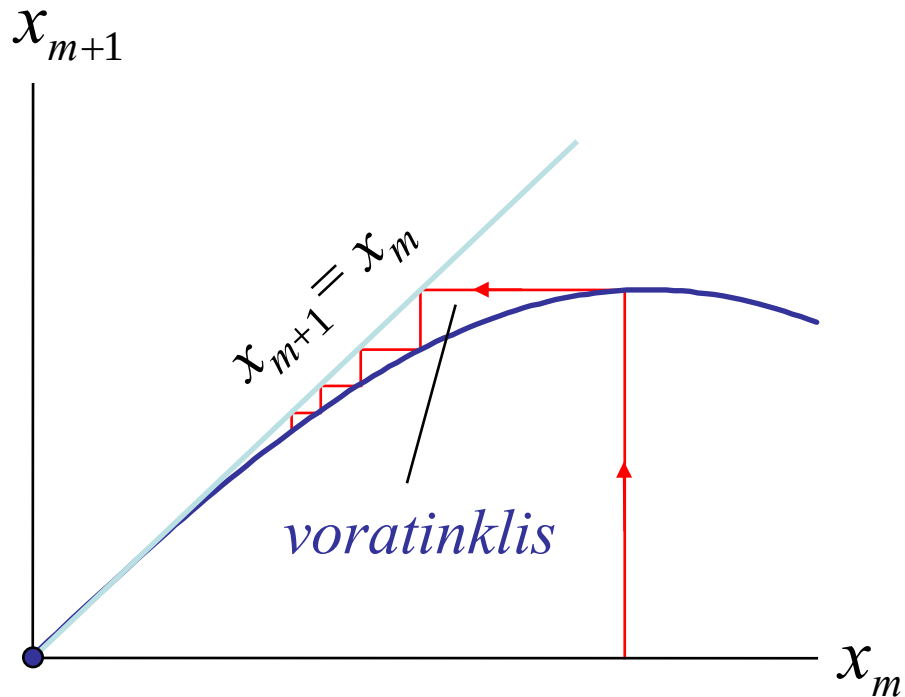
$x_m = f^{-1}(x_{m+1})$ yra nevienareikšmė.



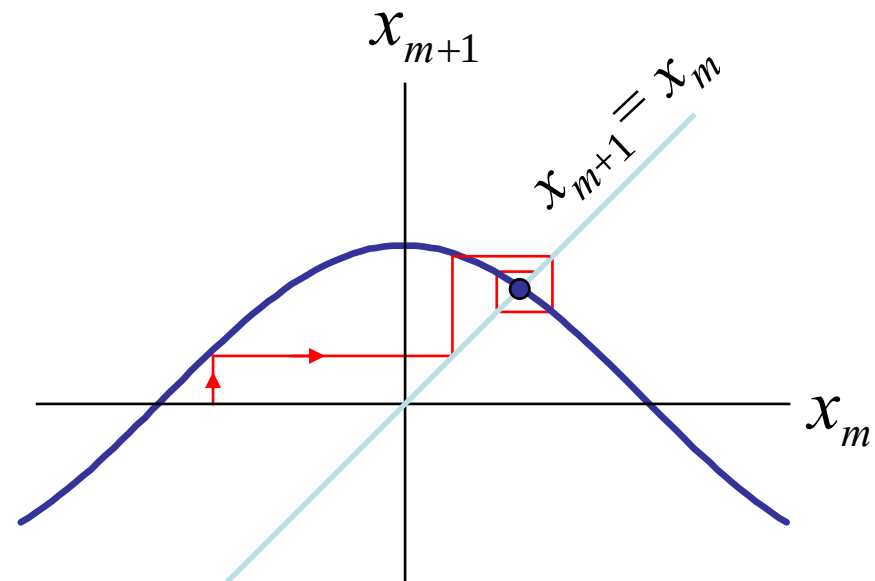
Pirmosios eilės atvaizdai

$$x_{m+1} = f(x_m)$$

$$x_{m+1} = \sin x_m$$



$$x_{m+1} = \cos x_m$$



Atvaizdų rimties taškai ir jų stabilumas

$$x_{m+1} = f(x_m)$$

Rimties taškas:

$$x_{m+1} = x_m = x^*$$

$$x^* = f(x^*)$$

Linearizavimas:

$$\Delta_m = x_m - x^* \text{ -nuokrypis}$$

$$\Delta_{m+1} = x_{m+1} - x^* = f(x^* + \Delta_m) - x^*$$

$$f(x^* + \Delta_m) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta_m + \dots$$

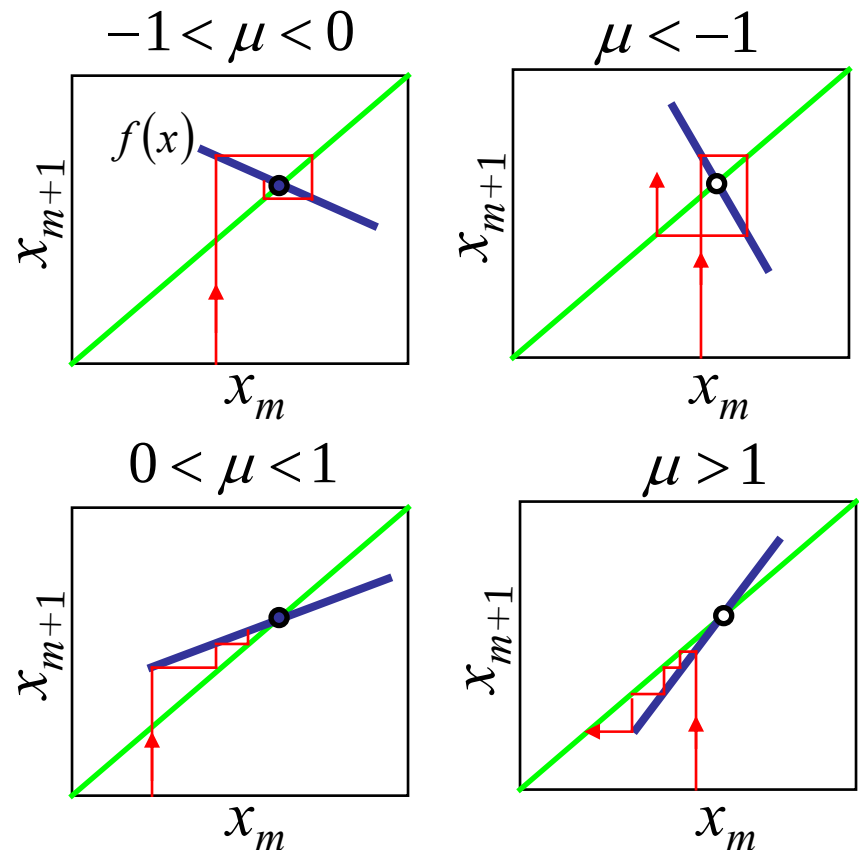
$$\Delta_{m+1} = f(x^*) - x^* + f'(x^*)\Delta_m + o(\Delta_m^2)$$

$$\Delta_{m+1} = f'(x^*)\Delta_m$$

$$\mu = f'(x^*) \text{ - Flokė daugiklis}$$

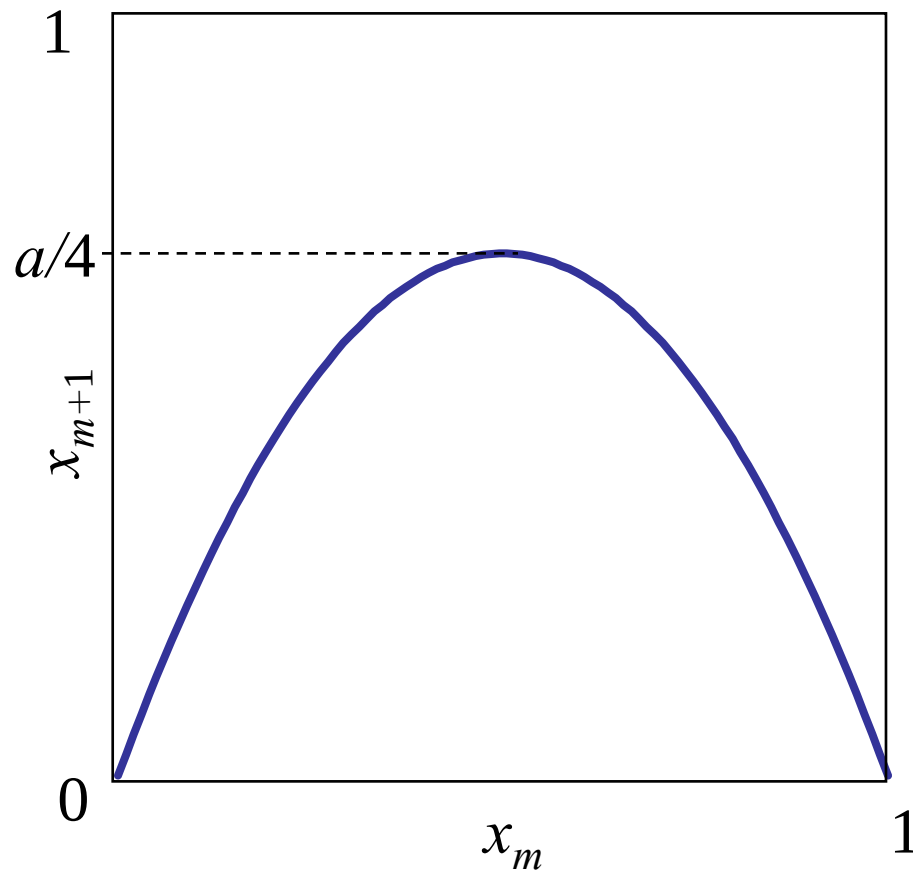
$$\Delta_{m+1} = \mu \Delta_m \Rightarrow \Delta_m = \Delta_0 \mu^m$$

$$|\mu| < 1 \text{ - stabilumo sąlyga}$$



Logistinis atvaizdas

$$x_{m+1} = ax_m(1 - x_m) = f(x)$$



Logistinio atvaizdo rimties taškai ir stabilumas

Rimties taškai: $x^* = f(x^*)$

$$x^* = ax^*(1 - x^*)$$

$$x^* = 0, \quad x^* = 1 - 1/a$$

Stabilumas:

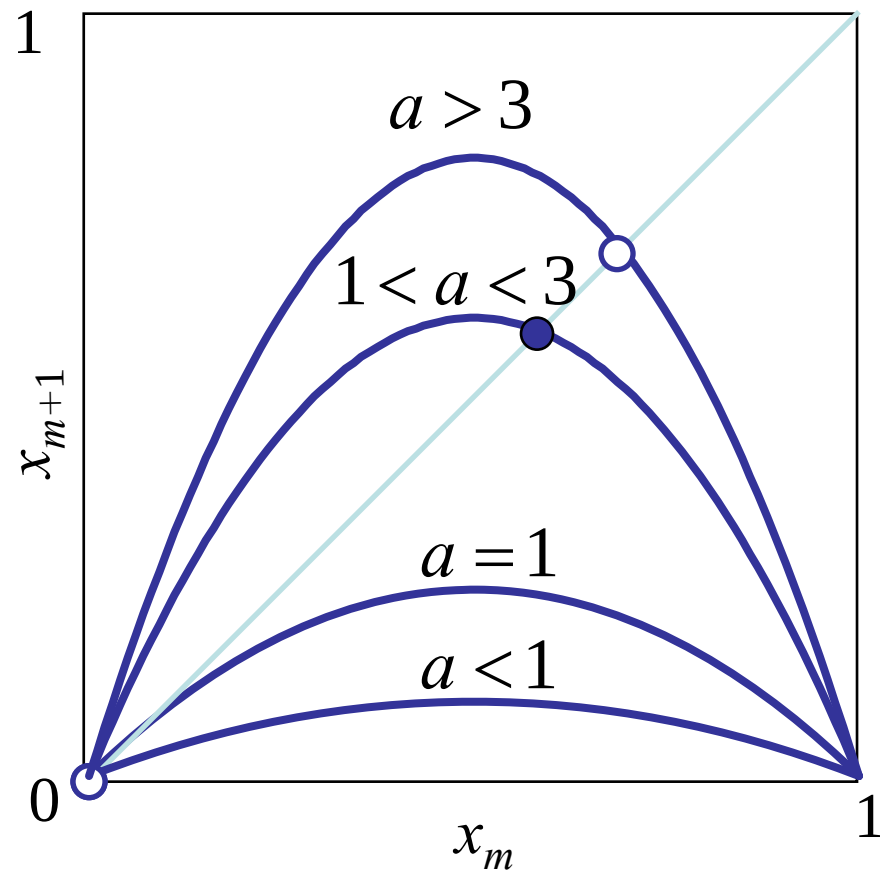
$$f'(x) = a(1 - 2x)$$

$$x^* = 0: \quad \mu = f'(0) = a$$

nestabilus, kai $a > 1$

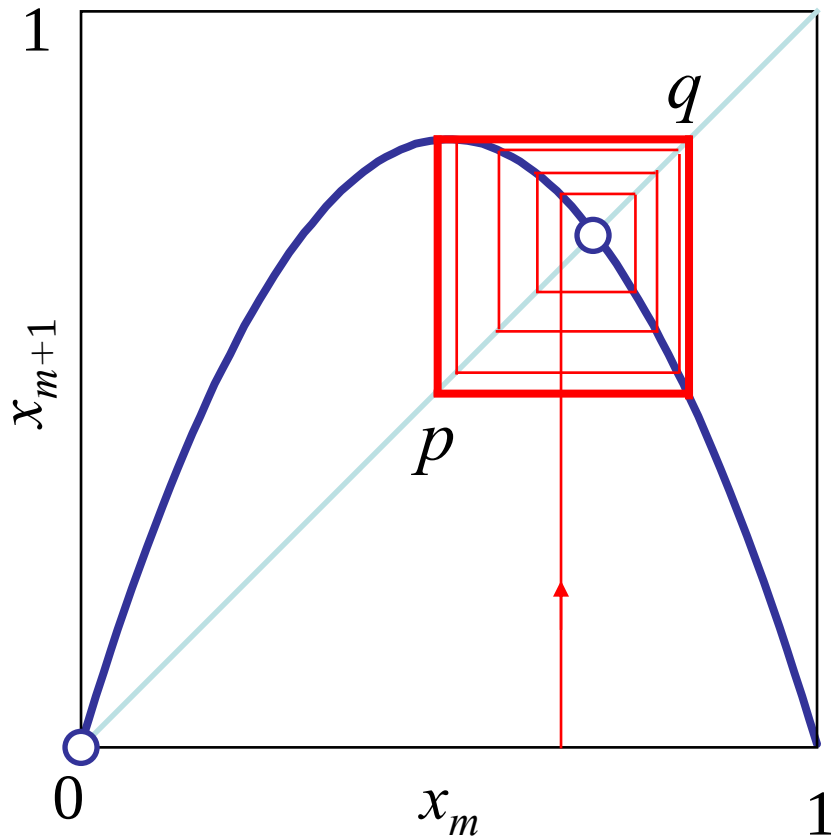
$$x^* = 1 - 1/a: \quad \mu = f'(x^*) = a(2/a - 1)$$

nestabilus, kai $a > 3$



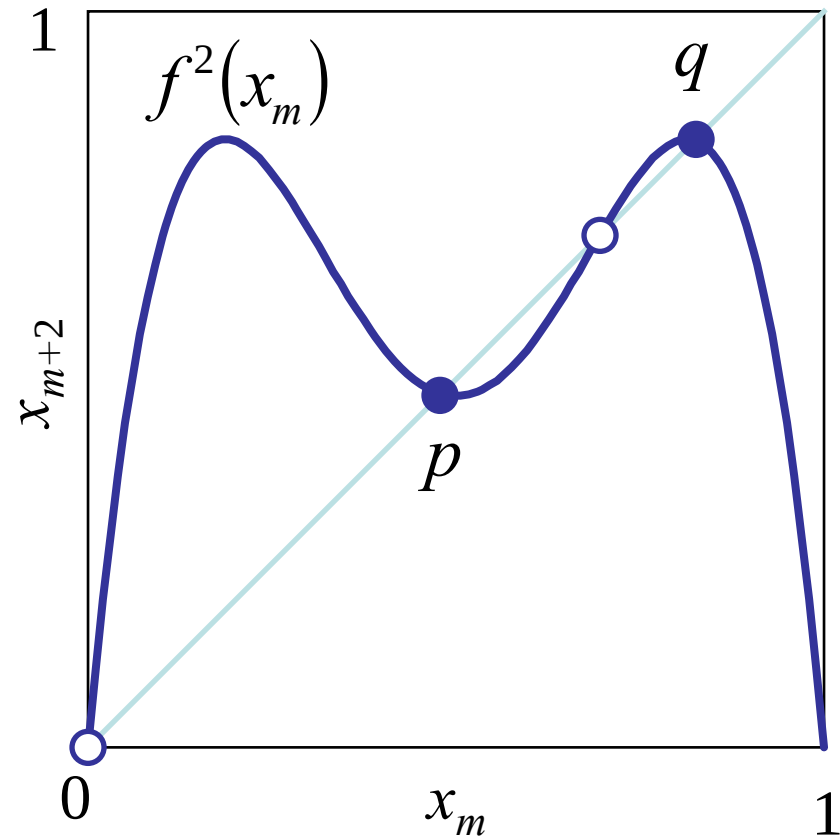
Kas bus, kai $a > 3$?

Periodo 2 ciklas ir jo stabilumas



$$f(p)=q, f(q)=p \Rightarrow f(f(p))=p$$

$$p, q = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$



$$x_{m+2} = f(f(x_m)) \equiv f^2(x_m)$$

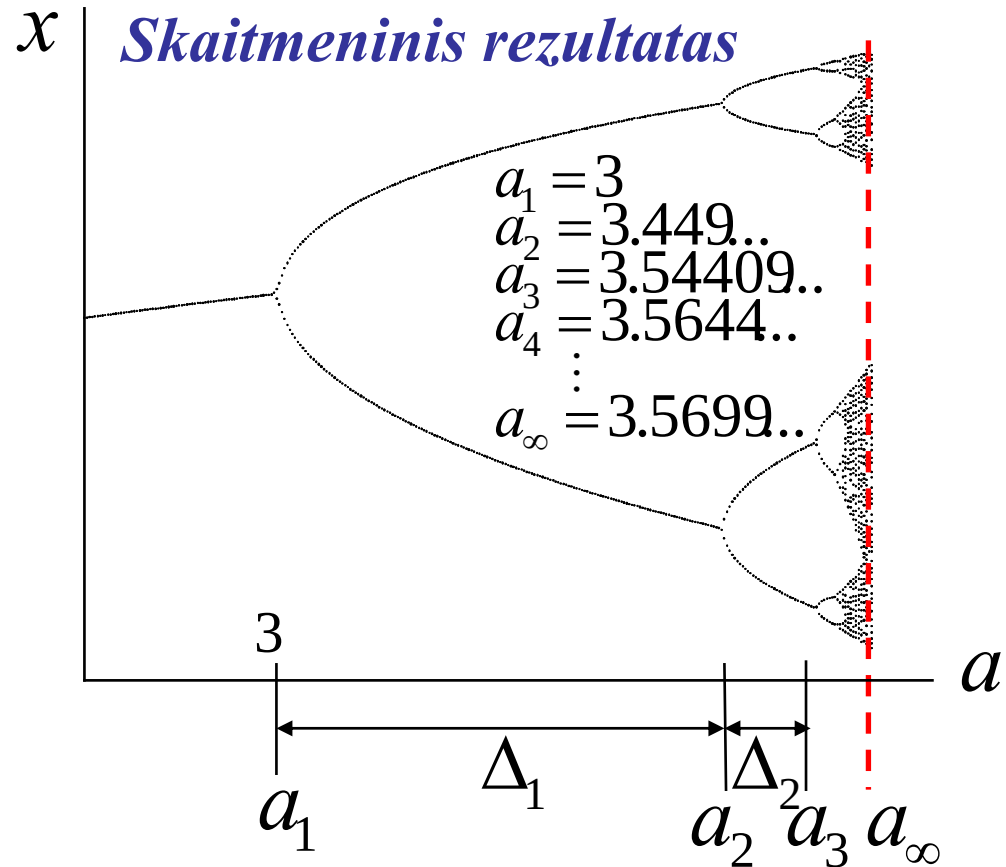
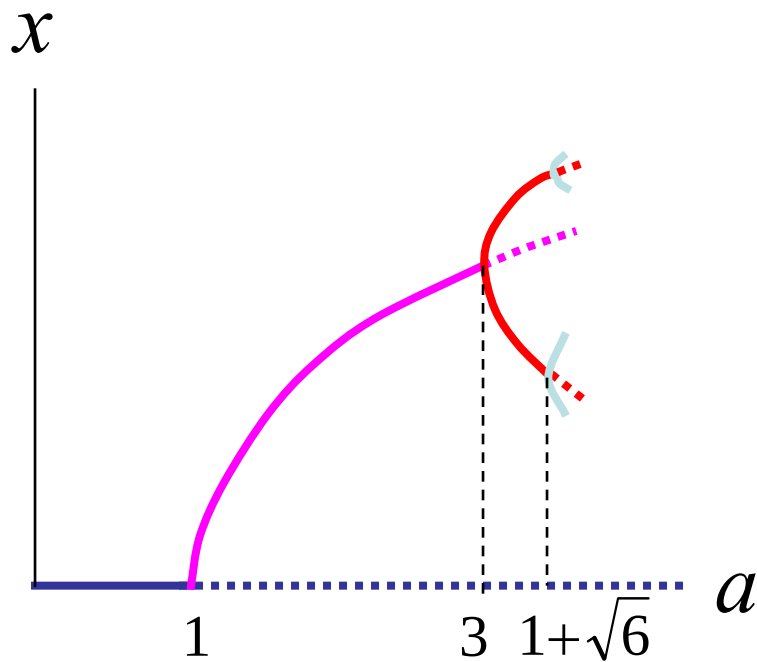
$$\mu = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p)$$

Ciklo stabilumo sąlyga:

$$|\mu| < 1 \Rightarrow 3 < a < 1 + \sqrt{6}$$

Periodo dvigubinimosi bifurkacijos

Analiziškai apskaičiuota bifurkacinės diagramos dalis:



Feigenbaumo dėsnis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \delta = 4.669\dots$$

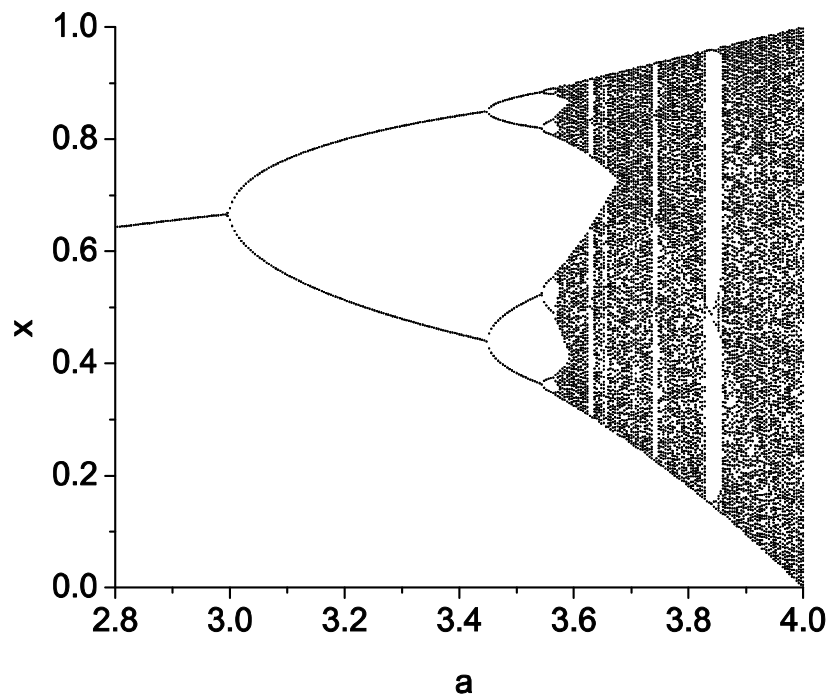
δ - universali Feigenbamo konstanta



Feigenbaumo scenarijaus ir bifurkacinės diagramos universalumas

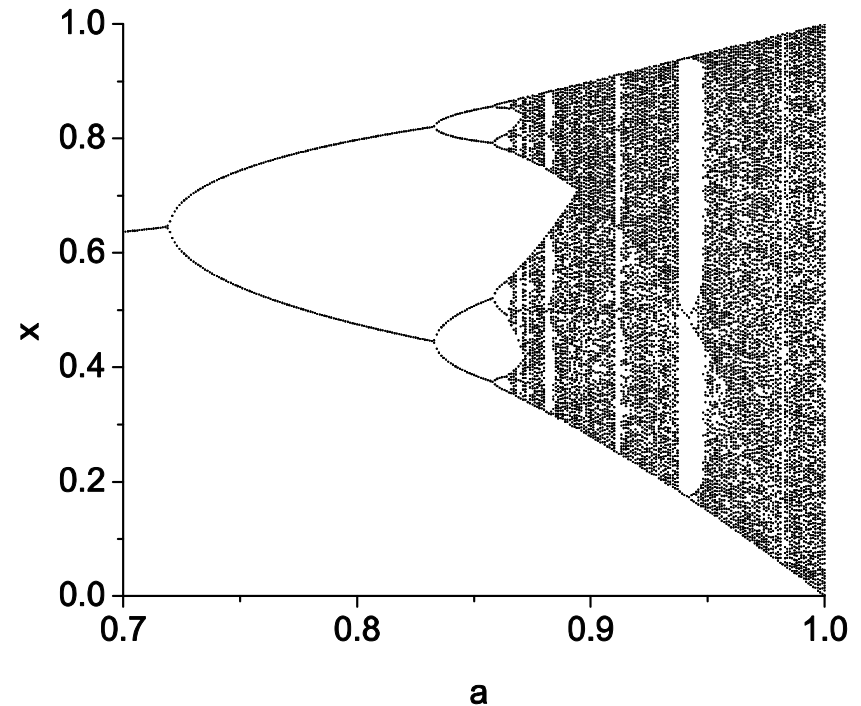
Logistinis atvaizdas

$$x_{m+1} = ax_m(1 - x_m)$$



Sinuso atvaizdas

$$x_{m+1} = a \sin x_m$$



Sinuso atvaizdui galioja Feigenbaumo dėsnis su ta pačia universale Feigenbaumo konstanta $\delta = 4.669\dots$. Be to chaotinėje srityje periodinių langų išsidėstymas abėjuose atvaizduose yra ekvivalentus.

Feigenbaumo scenarijaus pavyzdžiai

Roslerio sistema

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = bx + z(x - c)$$

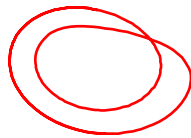
$$a = 0.2$$

$$b = 0.2$$

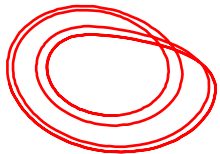
$$c = 2.5$$



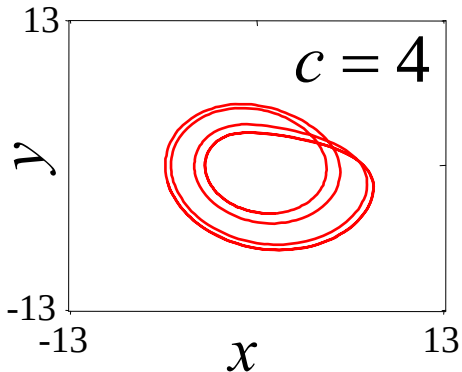
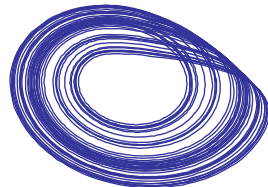
$$c = 3.5$$



$$c = 4$$

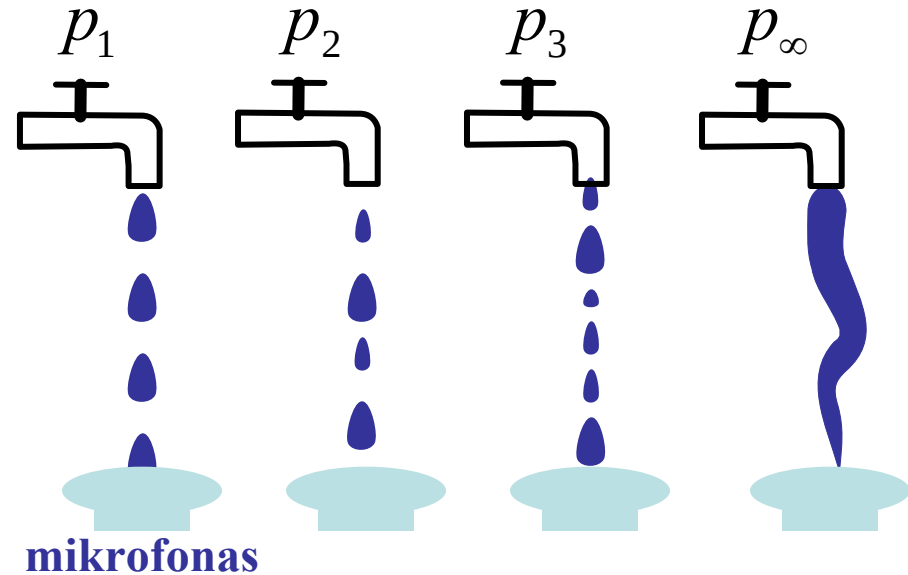


$$c = 5$$



Varantis kranas

p -krano pralaidumas



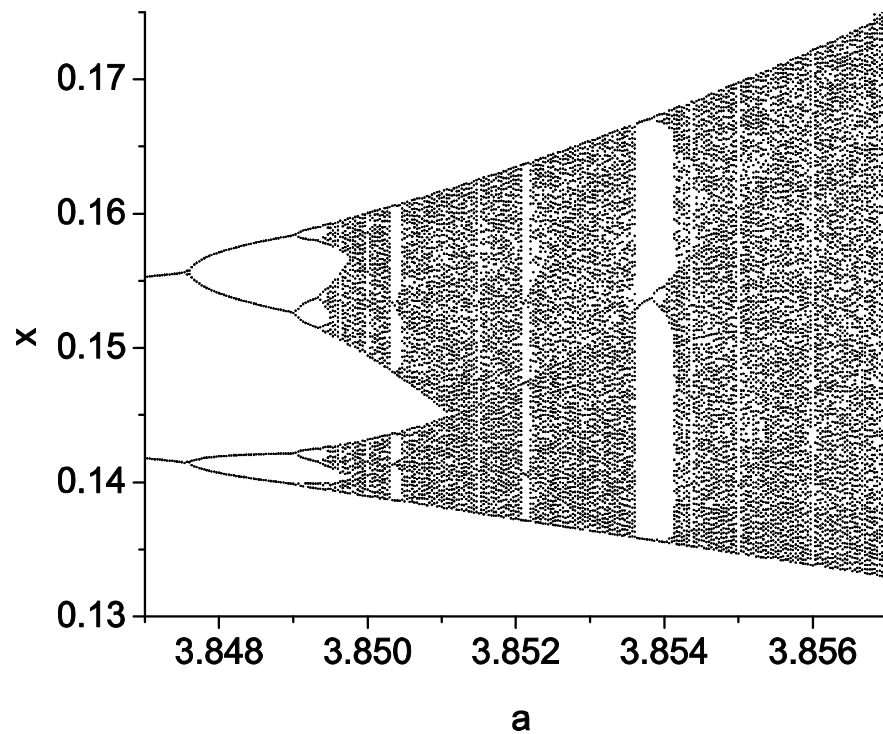
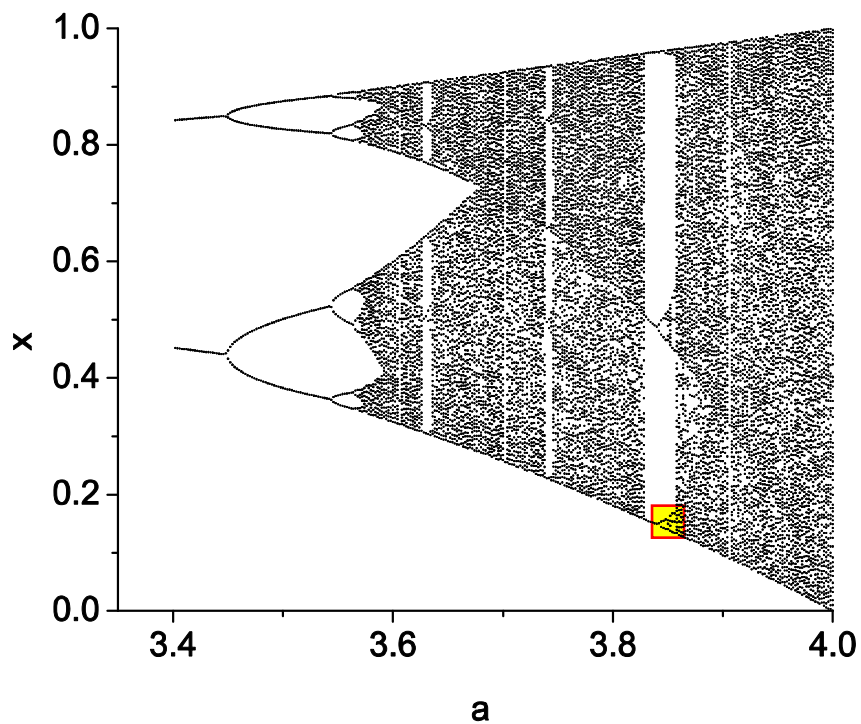
Galioja Feigenbaumo dėsnis:

$$\frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n} \approx 4.6$$



Bifurkacinės diagramos sudėtingumas

$$x_{m+1} = ax_m(1 - x_m)$$



DINAMINIS CHAOSAS

DISIPATYVIOSIOS SISTEMOS

KONSEVATYVIOSIOS SISTEMOS

BIFURKACIJOS

PERIODO
DVIGUBINIMO

TORO
SKILIMO

INTERMITENCI

CHAOTINĖS BŪSENOS

SIGNALŲ TYRIMAS

PROGNOZĖ

CHAOSO SINCHRONIZACIJA

CHAOSO VALDYMAS

LIAPUNOVO
EKSPONENTĖS

ATRAKTORIAUS
DIMENSIJA

ENTROPIJA

SAUGŪS
RYŠIAI

IDENTINĖ, FAZINĖ,
APIBENDRINTOJI
SINCHRONIZACIJA

II DALIS: Chaoso Teorijos Taikymai

- **Chaotinių signalų analizė**

Fazinės erdvės rekonstrukcija, Takenso teorema

Koreliacinės dimensijos nustatymas iš eksperimentinių signalų

- **Chaoso sinchronizacija ir saugūs ryšiai**

- **Chaoso valdymas**

Klasikinės valdymo teorijos istorija: Vato reguliatorius

Šiuolaikinės valdymo teorijos pagrindai

Pirmas praktinis chaotinių trajektorijų panaudojimas

Tvarka chaotiniame judėjime (nestabilios periodinės orbitos)

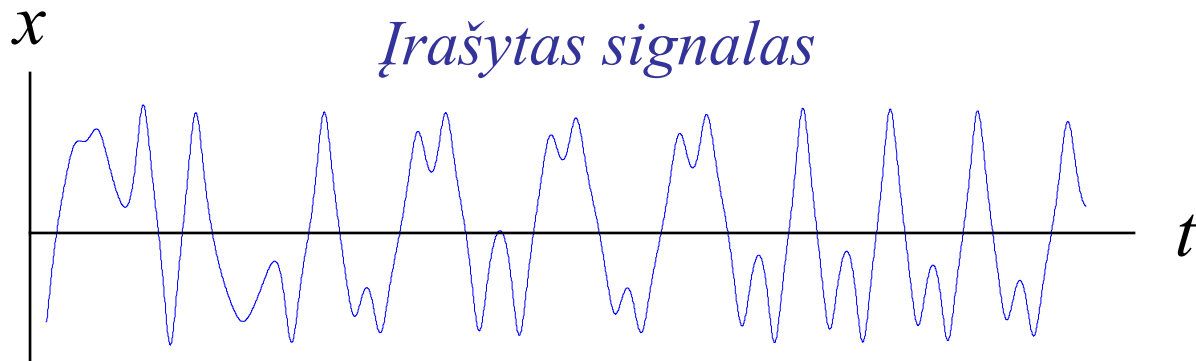
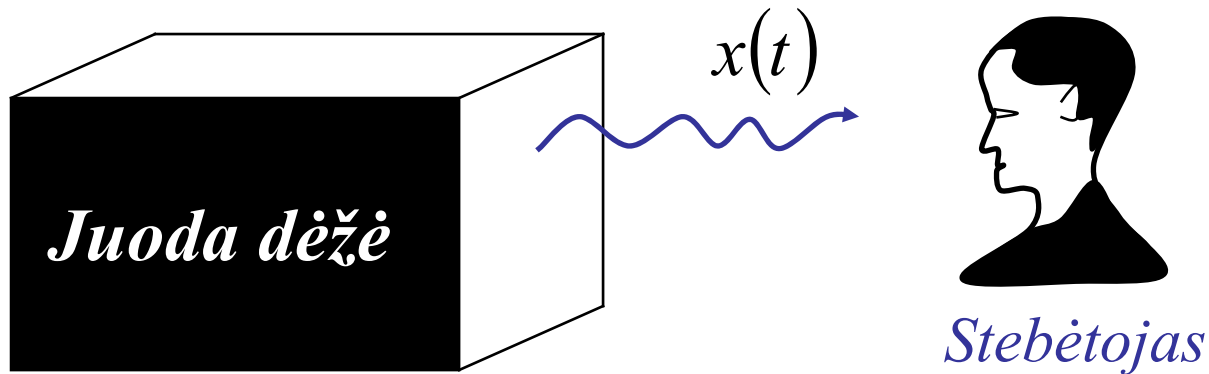
Pagrindinės chaoso valdymo idėjos

Uždelsto grįžtamojo ryšio valdymo (UGRV) metodas

Metodo eksperimentinės realizacijos

Metodo taikymo perspektyvos (teoriniai siūlymai)

Chaotinių signalų analizė



Ar galima iš įrašyto signalo nustatyti kas yra juodoje dėžėje?

Fazinės erdvės rekonstrukcija

Norint apskaičiuoti keistojo atarktorio charakteristikas reikia žinoti trajektorijos elgesį **visų** dinaminių kintamųjų fazinėje erdvėje.

Paprastai yra matuojamas tik **vienas** skaliarinis kintamasis $x(t)$, kuris yra visų dinaminių kintamųjų funkcija, $x(t) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

*Ar galima žinant tik **vieną** dinaminį kintamąjį rekonstruoti trajektoriją **daugiamatėje** fazinėje erdvėje?*

Uždelstųjų koordinačių metodas (Takenso teorema)



Koreliacinė dimensija

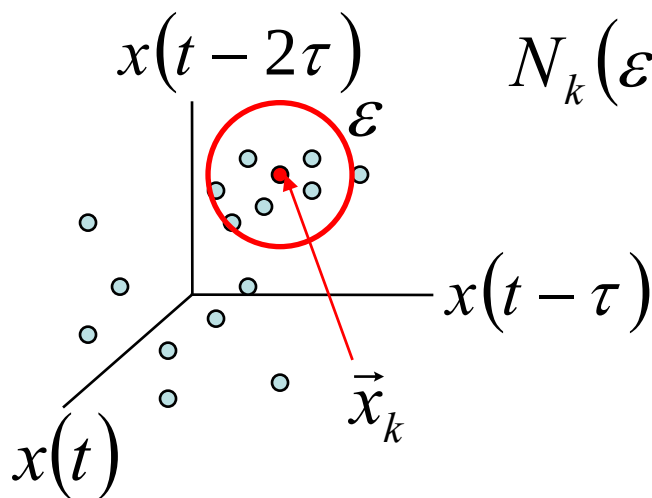
Dinaminių sistemų charakteristikos, tokios, kaip **Liapunovo rodikliai**, arba **keistojo atraktoriaus dimensija** yra **invariantinės koordinačių pokyčiui**. Todėl jų vertės galima apskaičiuoti iš vieno eksperimentinio signalo, naudojant uždelstųjų koordinačių metodą.

1983 m Grassberger ir Procaccia pasiūlė labai efektyvų algoritmą keistųjų atraktorių dimensijai apskaičiuoti. Idėja paremta **korelicinės dimensijos** sąvoka.

$x(t)$ - eksperimente matuojamas skaliarinis signalas

$\vec{x}(t) = \{x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)\}$ - **m**-matis rekonstruotas vektorius

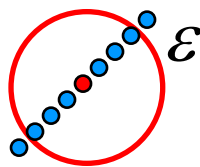
$\vec{x}_k \equiv \vec{x}(t_k)$ - vektoriaus vertės diskretingais laiko momentais



$N_k(\epsilon) \propto \epsilon^d$ - taškų skaičius ϵ spindulio sferoje

d - lokalinė (taškinė) dimensija

Pavyzdys: taškai tolygiai pasiskirstę linijoje



$$N_k(\epsilon) \propto \epsilon^1 \Rightarrow d = 1$$

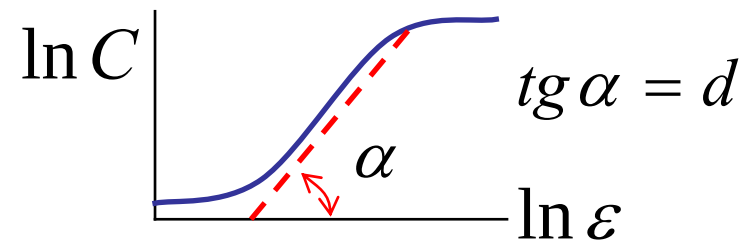
Koreliacinė dimensija

Vidutinė atraktoriaus dimensija nustatoma vidurkinant $N_k(\varepsilon)$ pagal atraktoriaus taškus:

$$C(\varepsilon) = \langle N_k(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_k(\varepsilon) - \text{koreliacinis integralas}$$

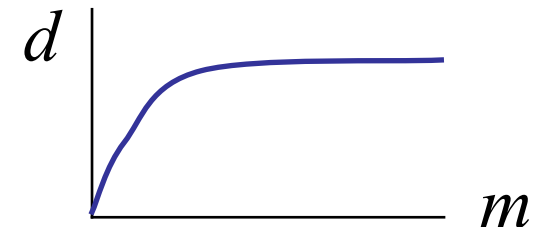
$$C(\varepsilon) \propto \varepsilon^d$$

d - koreliacinė dimensija



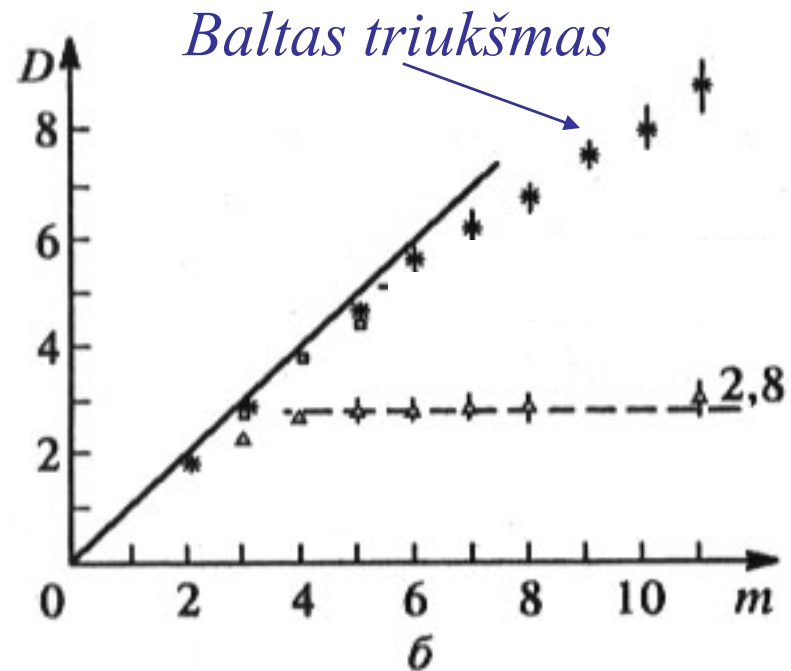
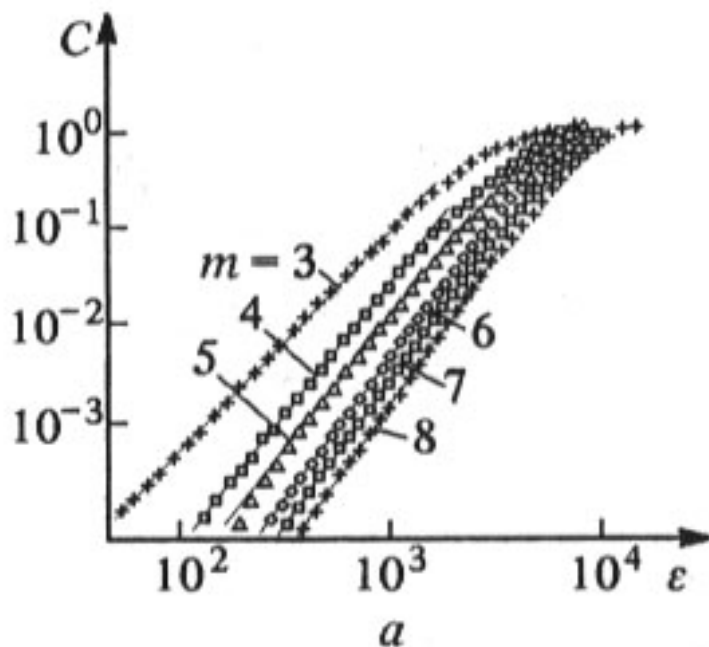
Kaip pasirinkti teisingą rekonstruotos erdvės dimensiją m ?

Reikia skaičiuoti d įvairioms vertėms m ir didinti m tol, kol $d(m)$ nustos priklausyti nuo m (įsisotins). Tą soties vertę ir bus tikroji atraktoriaus dimensija.



Atraktoriaus dimensija nusako mažiausią laisvės laipsnių skaičių (diferencialinių lygčių skaičių), kuriuo galima aprašyti stebimą chaotinį procesą.

*Pavyzdys: koreliacinės dimensijos nustatymas iš
Benardo nestabilumo eksperimento
(Malraison et al., 1983)*



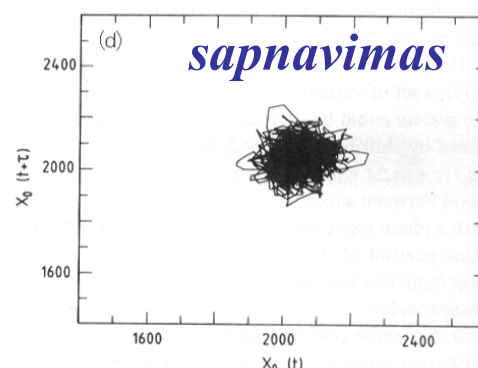
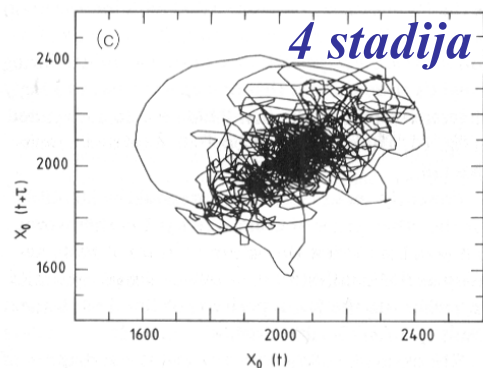
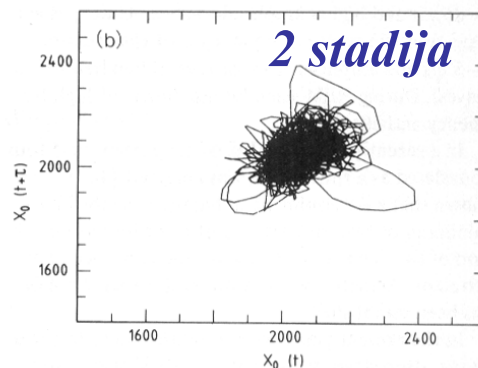
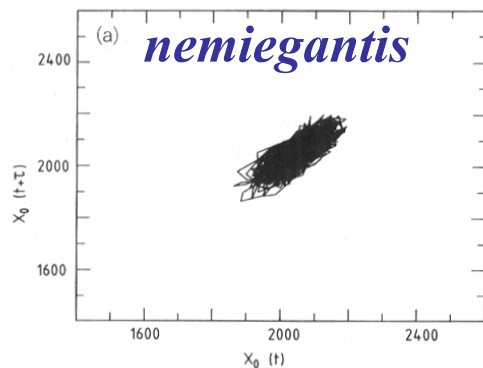
$d \approx 2.8$ - tai reiškia, kad eksperimentinę sistemą galima sumodeliuoti trijų priklausomų diferencialinių lygčių sistema.

Pavyzdys: smegenų aktyvumo (EEG) dimensija

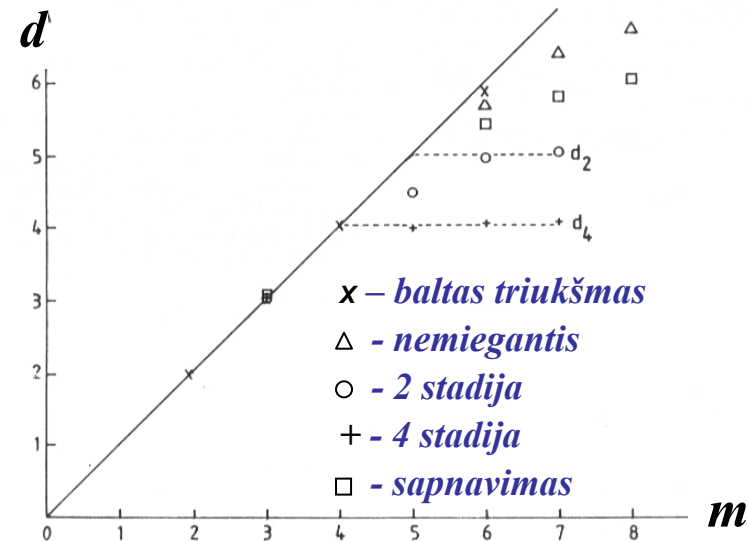
Miego stadijos:

1. Pacientas periodiškai tai užmiega, tai pabunda
2. Miegantį galima pažadinti mažiausiu triukšmu
3. Miegantį galima pažadinti tik stipriu triukšmu
4. Gilus miegas
5. Sapnavimas (stebimas greitas akių judėjimas)

Rekonstruoti EEG faziniai portretai, $m=2$.



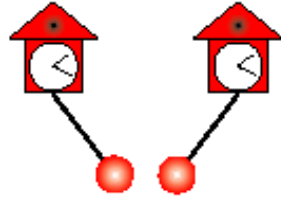
Koreliacinės dimensijos priklausomybė nuo m



Baigtinė dimensija stebima 2 ir 4 miego stadijoj: $d_2 \approx 5$, $d_4 \approx 4$

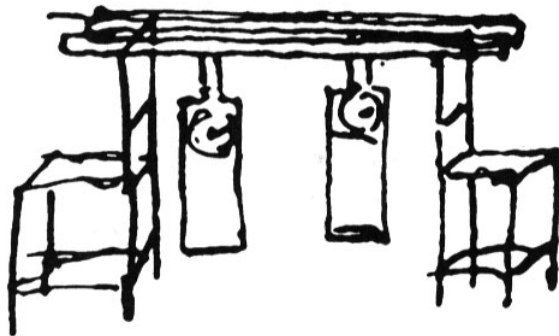
Chaotinių sistemų sinchronizacija

Istorija ir pavyzdžiai

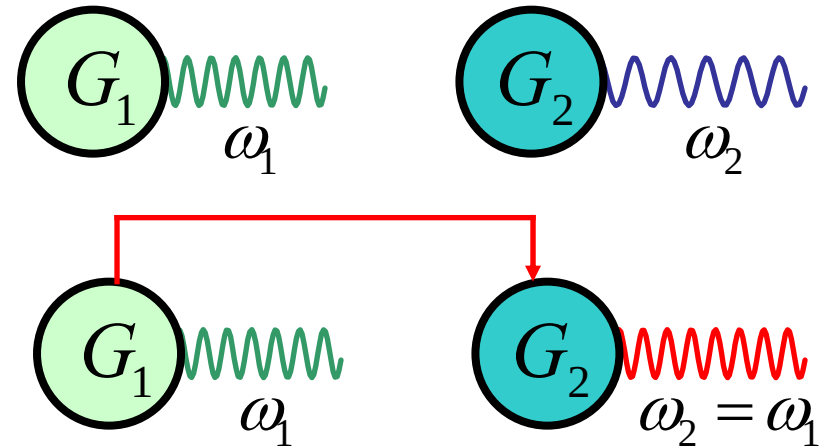


Huygens
1629-1698

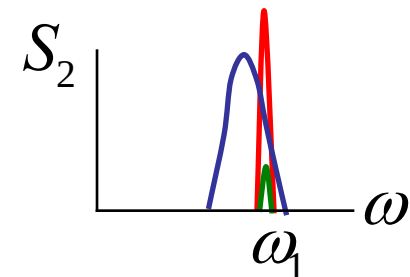
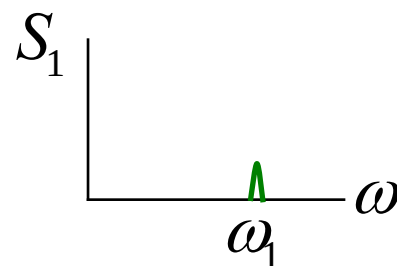
*Dviejų švytuoklinių laikrodžių
sinchronizacija (XVII šimtmetis)*



Elektroninių generatorių sinchronizacija



*Taip galima pagerinti galingo
generatoriaus spektrinę liniją*



Identiškoji sinchronizacija

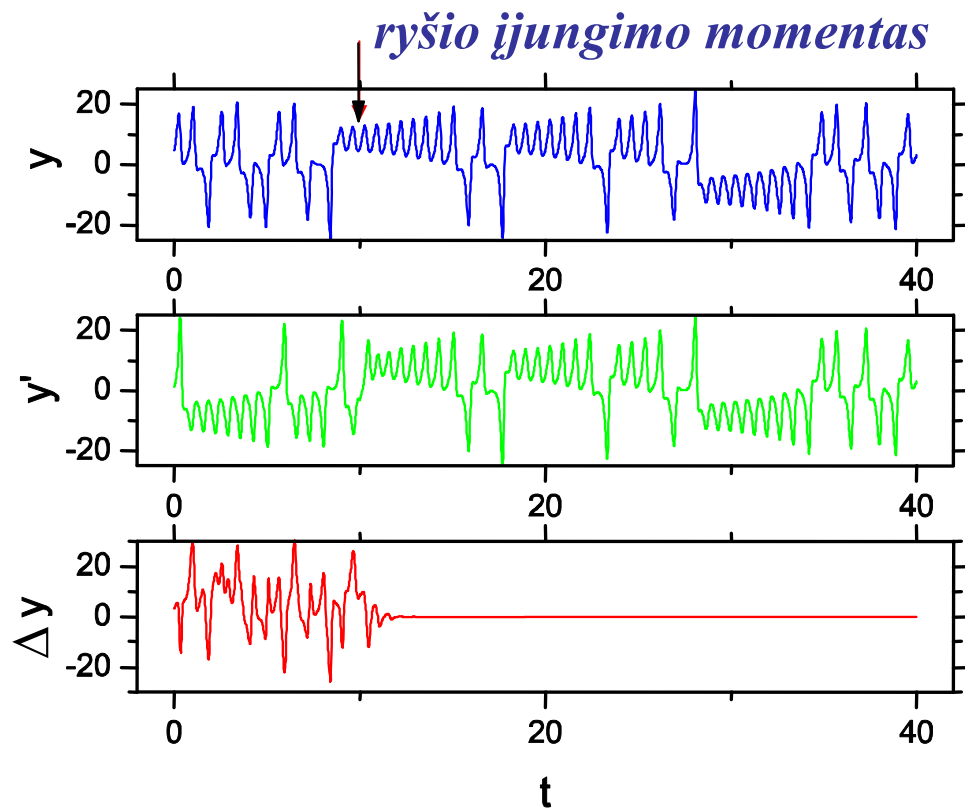
Dėl drugelio efekto dvi identiškios chaotinės sistemos generuoja skirtingus signalus. Tačiau atitinkamai sujungus sistemas galima jas sinchronizuoti ir gauti identiškus signalus.

*Vienpusiškai
surištos
Lorenzo
sistemos*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

↓ $y(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= s(y' - x') \\ \dot{y}' &= rx' - y' - x'z' - K(y' - y) \\ \dot{z}' &= x'y' - bz'\end{aligned}$$



Sinchronizacija ir chaoso prognozė

K. Pyragas, Phys. Lett. A 181, 203 (1993)

Paprastai prognozės uždaviniuose tariama, kad prognozuotojas yra **pasyvus** objektas – jis tik stebi sistemą ir neįtakoja jos dinamiką.

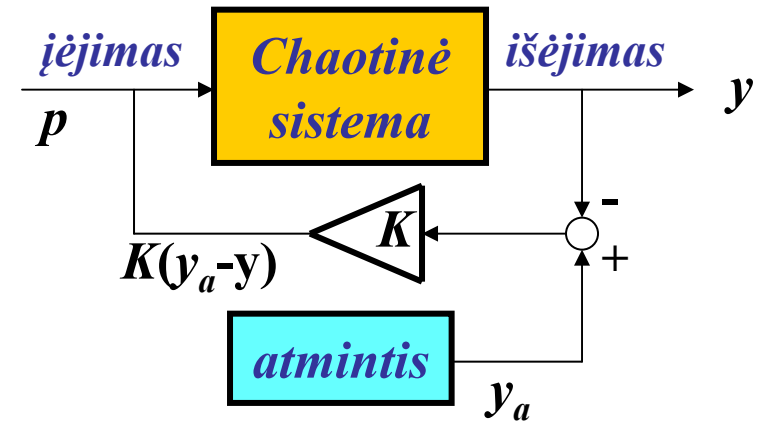
Tačiau jeigu leisime prognozuotojui **trupučiuką** įtakoti sistemą, tai toks **aktyvus** prognozuotojas gali iš esmės pagerinti savo prognozę.

Metodo idėja paremta sistemos esamos būsenos sinchronizavimu su praeitimi.

1 Etapas: pasirenkama tam tikra chaotinio signalo atkarpa ir įrašoma į atmintį.



2 Etapas: chaotinė sistema sinchronizuojama su įrašytu į atmintį signalu.



Jeigu sinchronizacija įvyko, tai

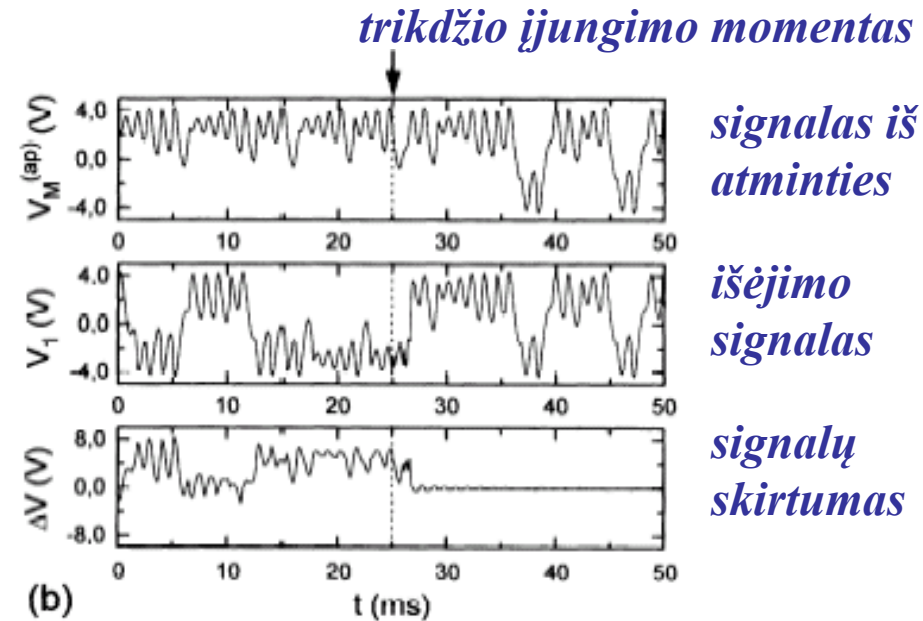
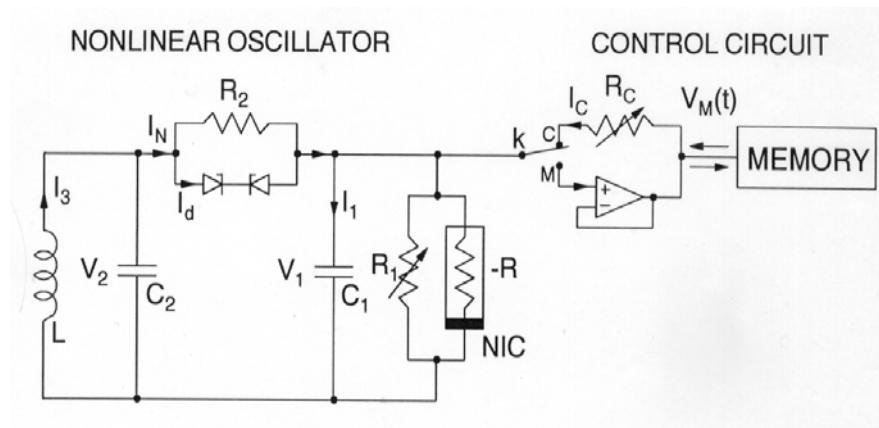
$$y(t) = y_a(t)$$

Veikiama nykstamai **mažo trikdžio** sistema atkartoja praeitą elgesį, kuris yra atmintyje. Taigi sistemos elgesys tampa visiškai **prognozuojamas** !

Pavyzdys: elektroninio generatoriaus dabarties ir praeities sinchronizavimas

A. Kittel, K. Pyragas, R. Richter, Phys. Lett. A 181, 203 (1993)

Eksperimentinė schema



Metodas nereikalauja žinių apie tiriamos sistemos modelį ir gali būti taikomas įvairios prigimties dinaminėms sistemoms, tame tarpe ir biologinėms.

Šis metodas taip pat buvo eksperimentiškai realizuotas lazeriuose bei feromagnetinio rezonanso sistemose.

Chaos sinchronizacijos panaudojimas saugiams ryšiams



Pavyzdys parentas Mackey-Glasso sistema

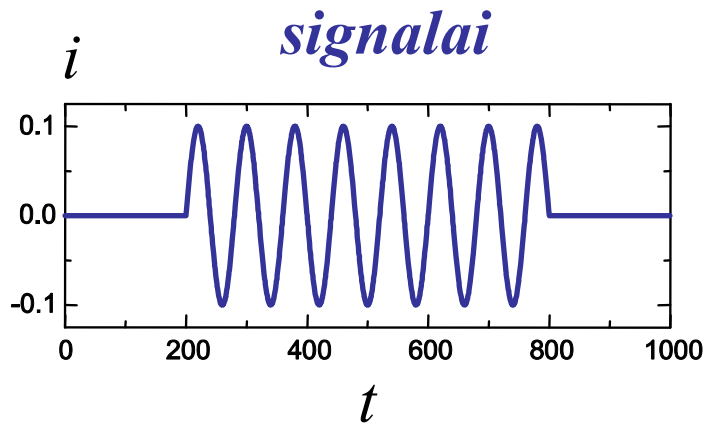
$$\dot{x} = f[x(t - \tau) + i(t)] - x \quad \text{- siųstuvas} \quad f(u) = au / (1 + x^b) \quad i(t) \quad \text{- informacinis signalas}$$

$$s(t) = x(t - \tau) + i(t) \quad \text{- siunčiamas signalas}$$

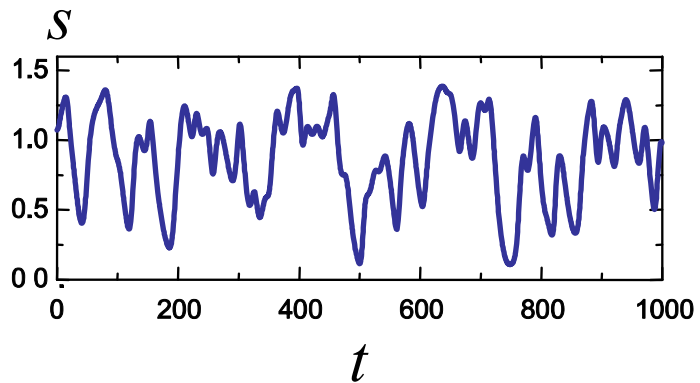
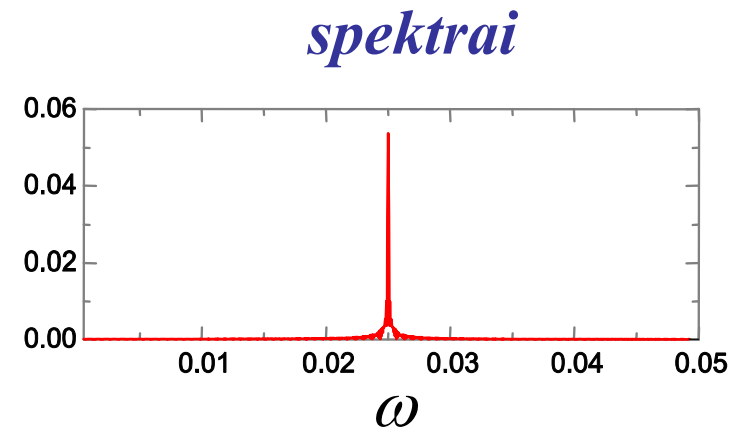
$$\dot{x}' = f[s(t)] - x' \quad \text{- imtuvas} \quad i'(t) = s(t) - x'(t - \tau) \quad \text{- dekodotas signalas}$$

$$\Delta = x' - x \Rightarrow \dot{\Delta} = -\Delta \Rightarrow \Delta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow x'(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x(t) \Rightarrow \boxed{i'(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} i(t)}$$

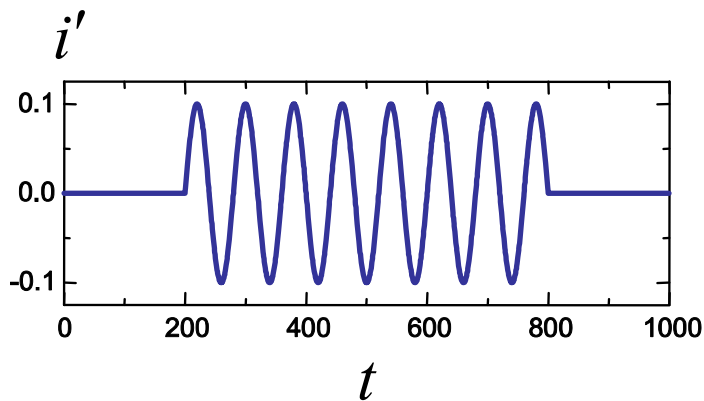
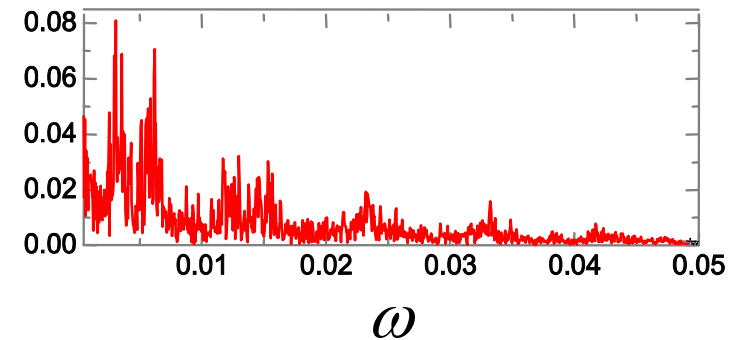
Rezultatai



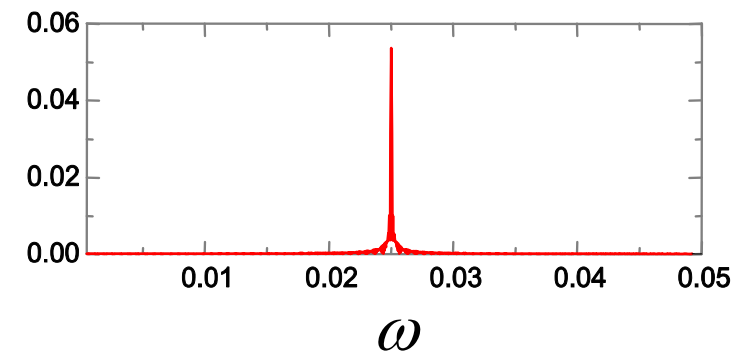
*informacinis
signalas*



*siunčiamas
signalas*



*dekoduotas
signalas*



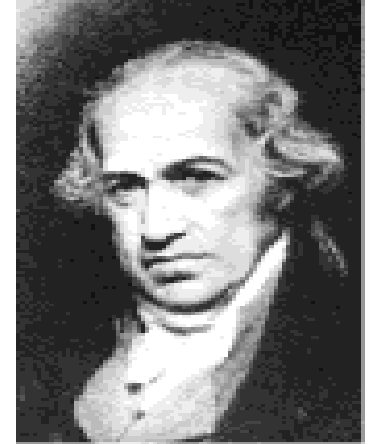
Chaosso valdymas

TURINYS:

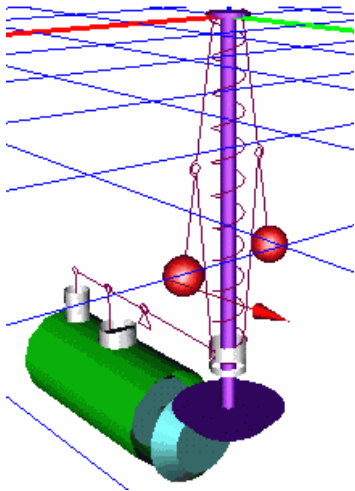
- *Klasikinės valdymo teorijos istorija: Vato regulatorius*
- *Šiuolaikinės valdymo teorijos pagrindai*
- *Pirmas praktinis chaotinių trajektorijų panaudojimas*
- *Tvarka chaotiniame judėjime (nestabilios periodinės orbitos)*
- *Pagrindinės chaosso valdymo idėjos*
- *Uždelsto grįžtamojo ryšio valdymo (UGRV) metodas*
- *Metodo eksperimentinės realizacijos*
- *Metodo taikymo perspektyvos (teoriniai siūlymai)*

Klasikinės valdymo teorijos istorija: Vato regulatorius

- 1763 m. Vatas patobulino T. Niukomeno garo mašiną – padidino jos galią 2 kartus. Jis užpaten-tavo savo išradimą ir tapo turtingas žmogus. Su šiuo išradimu siejama techninės revoliucijos pradžia.
- Vatas įvedė galios matavimo vienetą – arklio galią. Vėliau jo garbiai buvo pavadintas kitas galios vienetas – Vatas.

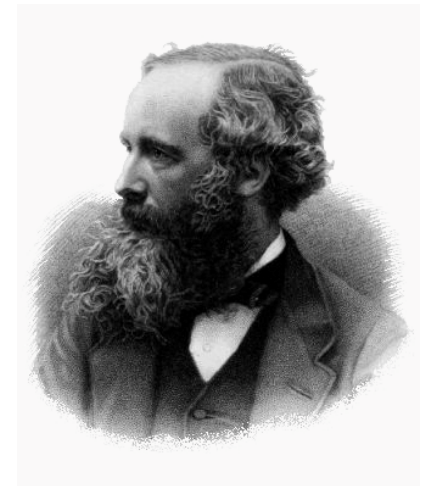


James Watt (1736-1819)



Vato regulatorius

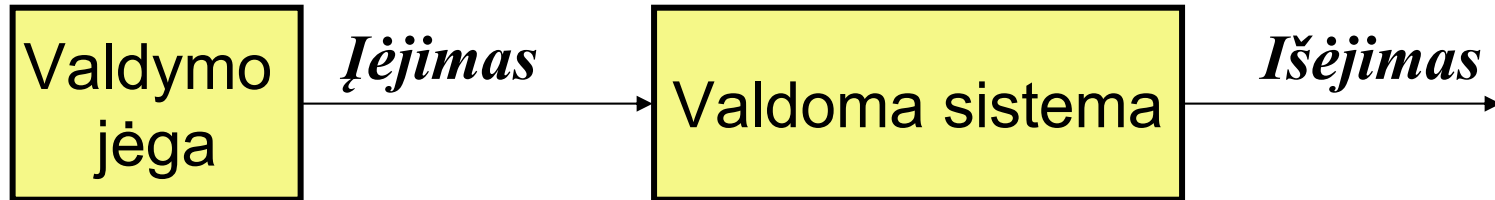
J. C. Maksvelas – valdymo teorijos pradininkas. Jis sukūrė automatinio Vato greičio regulatoriaus teoriją.



J. C. Maxwell (1831–1879)

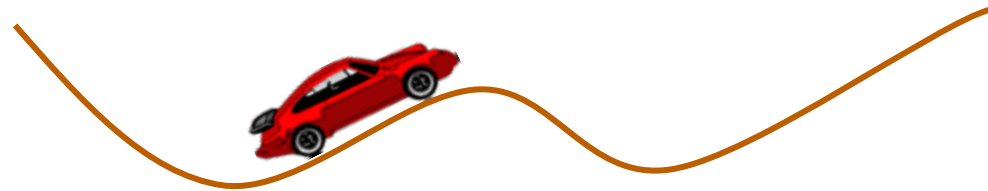
Šiuolaikinės valdymo teorijos pagrindai

Valdymas be grįžtamojo ryšio



Pavyzdžiai:

➤ *Automobilio su fiksuotai nuspaustu akseleratoriumi judėjimo greitis kinta*



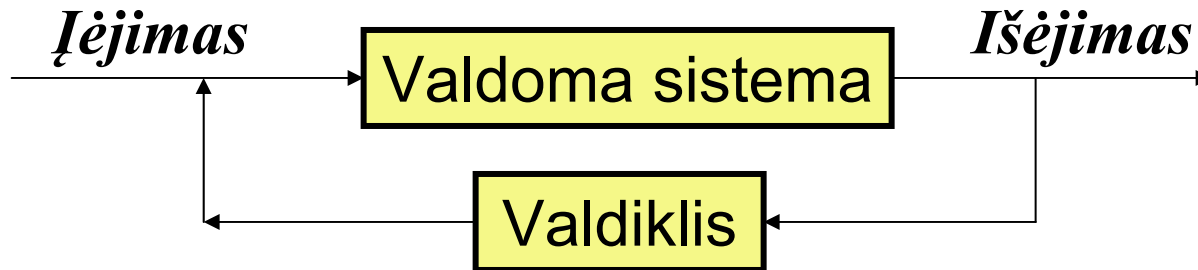
➤ *Diktatūrinės, totalitarinės valstybės*



Valdymas be grįžtamojo ryšio dažniausiai būna neefektyvus ir reikalauja didelės valdymo jėgos

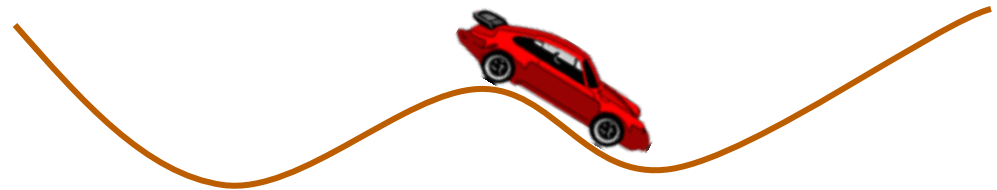
Šiuolaikinės valdymo teorijos pagrindai

Valdymas su grįžtamoju ryšiu



Pavyzdžiai:

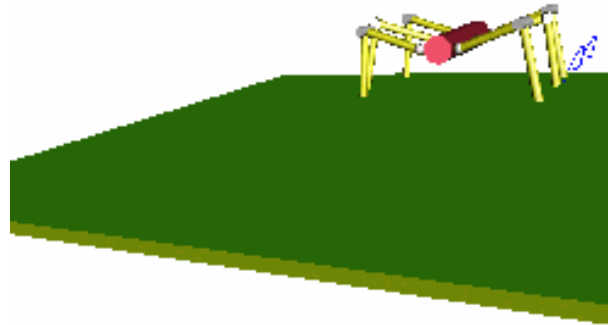
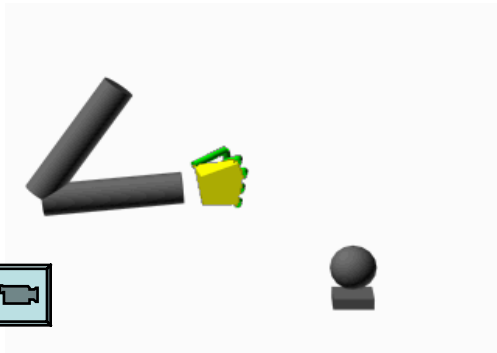
- *Autopilotas (automatinis pastovaus greičio palaikymas)*
- *Kondensierius (automatinis pastovios temperatūros palaikymas)*
- *Automatinį temperatūros valdymo mechanizmą turi šiltakraujai gyvūnai*
- *Demokratinis valdymas (grįžtamasis ryšys – rinkimai)*



Valdymas su grįžtamoju ryšiu yra efektyvus ir nereikalauja didelės valdymo jėgos

Šiuolaikinės valdymo teorijos pagrindai

- *Šiuolaikinė automatinio valdymo teorija yra labai solidus mokslas su gana sudėtinga matematika.*
- *Valdymo teorija plačiai taikoma įvairiose srityse. Tai pirmiausia roboto technika.*



Norbert Wiener (1894-1964)
Kibernetikos pradininkas

- *Labai daug valdymo teorijos rezultatų panaudota šiuolaikiniuose namų apyvokos prietaisuose: skalbimo mašinoje, televizoriuje, CD grotuve, šaldytuve it t.t.*

Klasikinė valdymo teorija ir chaosas

Pagrindinės klasikinės valdymo teorijos koncepcijos:

- **Grįžtamieji ryšiai** (efektyviausias valdymas mažomis sąnaudomis)
- **Fluktuacijos** (nereikia stengtis iš karto pasiekti valdymo tikslą)
- **Optimizacija** (reikia parinkti geriausius valdymo algoritmo parametrus)

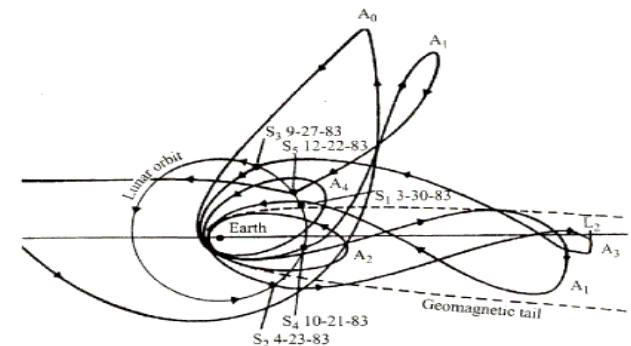
Chaosso teorija – Naujos idėjos valdymo moksle

Chaotinės sistemos nepaprastai jautrios mažiems trikdžiams – tai galima panaudoti efektyviam jų valdymui

Tai kas blogai prognozuojama – gerai valdoma

Pirmas praktinis chaotinių trajektorijų panaudojimas

- **Nepaprastą chaotinių sistemų jautrumą mažiems trikdžiams pirmą kartą panaudojo NASA.**
- **1985 mūsų Saulės sistemą aplankė kometa Giacobini Zenner. Labai mažomis kuro sąnaudomis NASA nukreipė į ją kosminį aparatą tuomet skraidantį tarp Saulės ir Žemės vadinamąja Halo orbita.**

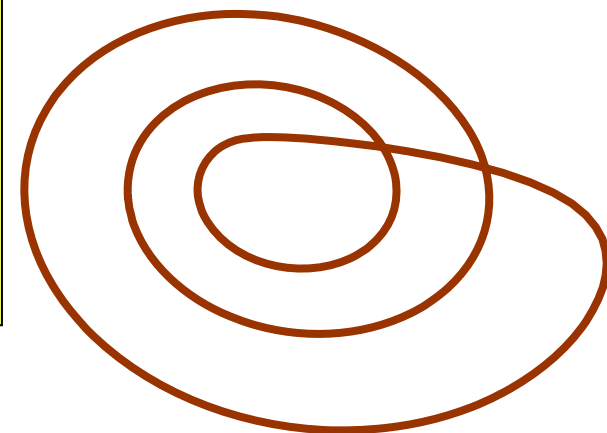
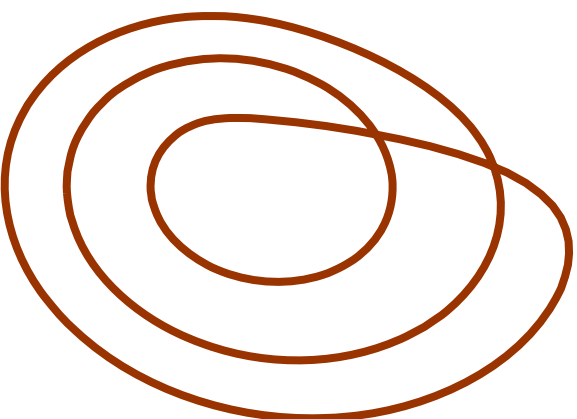
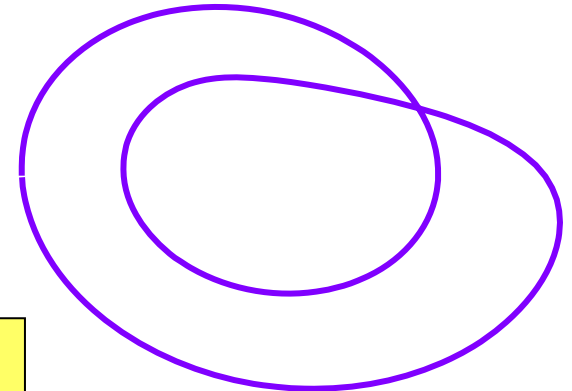
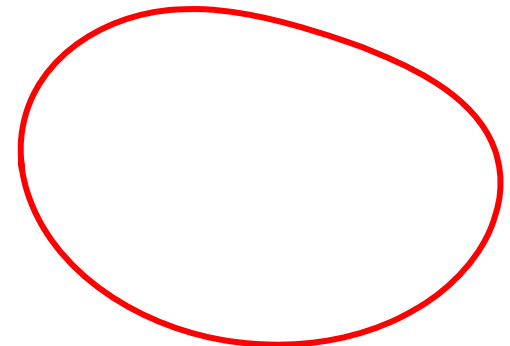
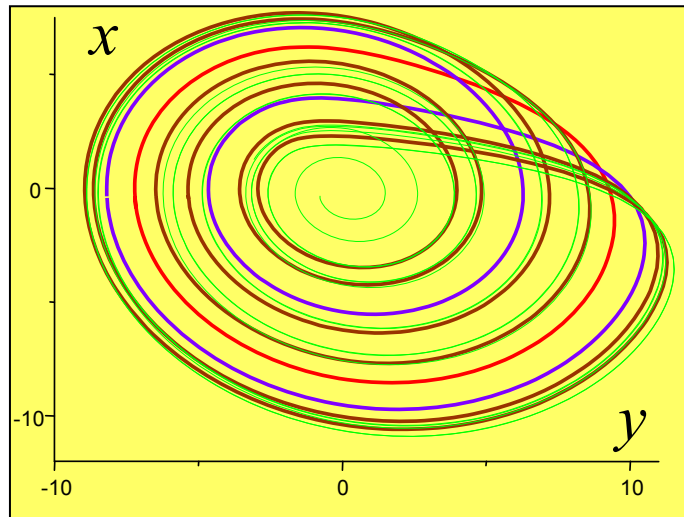


Kosminio aparato trajektorija

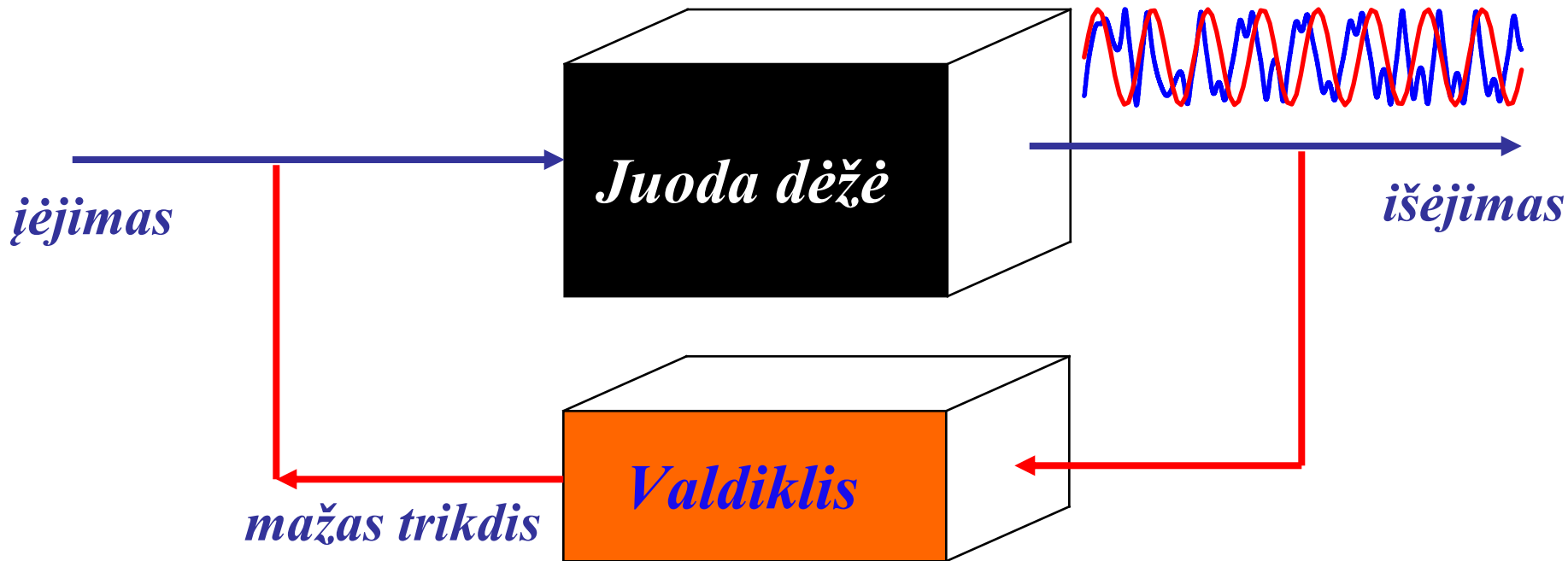
Tvarka chaotiniame judėjime

Rioslerio sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + a y \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$



Pagrindinės chaosso valdymo idėjos

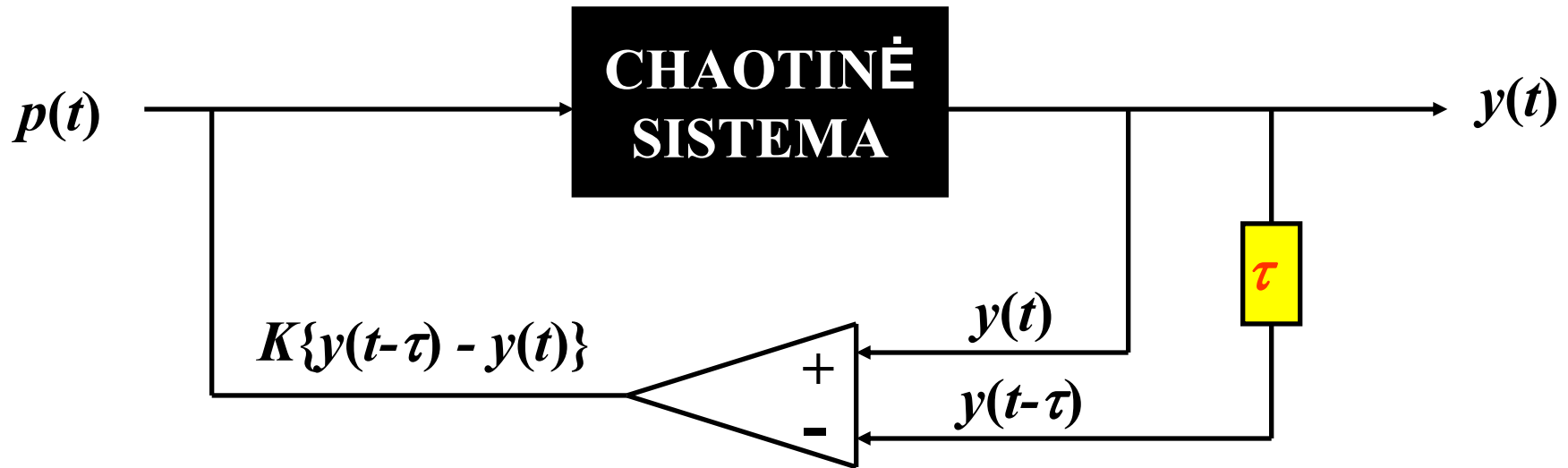


**Chaosso valdymo idėja paremta dviem chotinių sistemų savybėm
(Ott, Grebogy, Yorke, 1990):**

- *nepaprastu jautrumu mažiems trikdžiams (drugelio efektas)*
- *nestabiliųjų periodinių orbitų egzistavimu*

Uždelsto grįžtamo ryšio valdymo (UGRV) metodas

K. Pyragas, Phys. Lett. A 170, 421 (1992)



$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, p)$$

$$y(t) = g(\vec{x})$$

$$p = p(t) = K[y(t) - y(t - \tau)]$$

τ – nestabilios periodinės orbitos periodas

- Pagal ISI duomenis šis straipsnis pacituotas **1760** kartus.

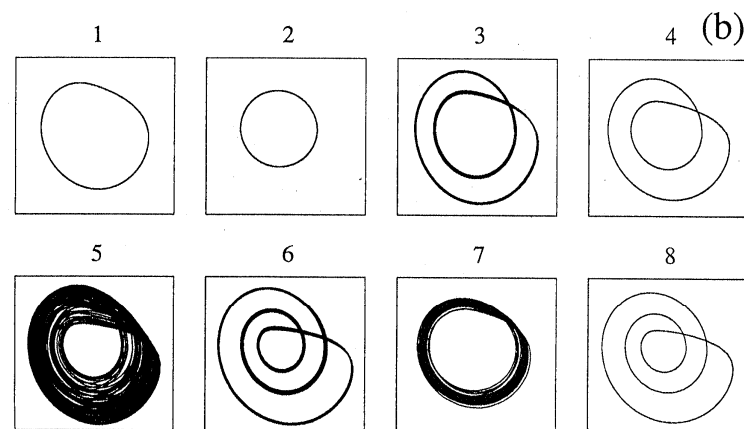
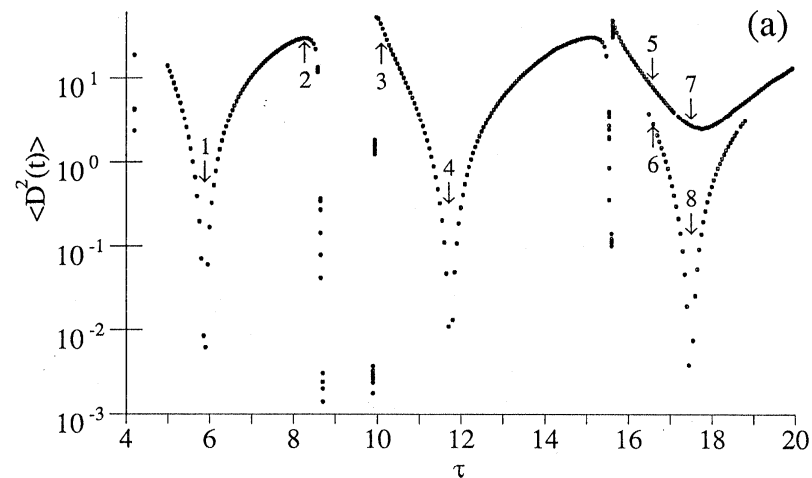
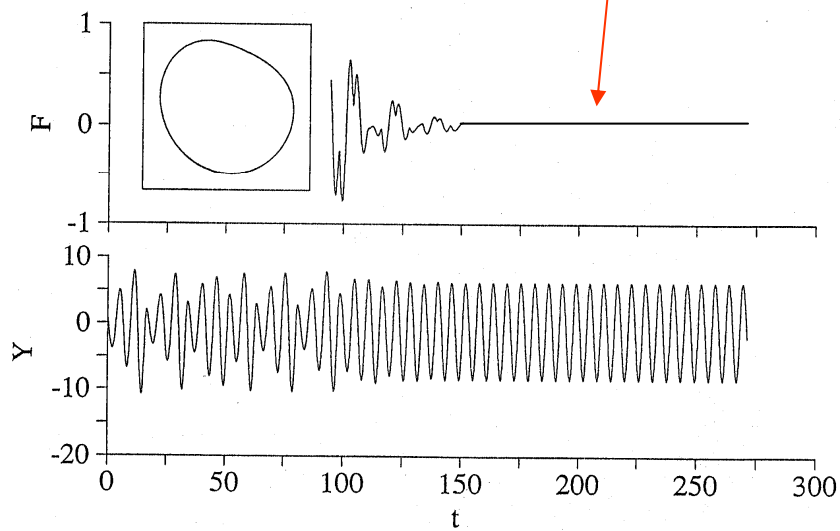
UGRV metodo iliustracija (Rioslerio sistema)

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay + K\{y(t-\tau) - y(t)\}$$

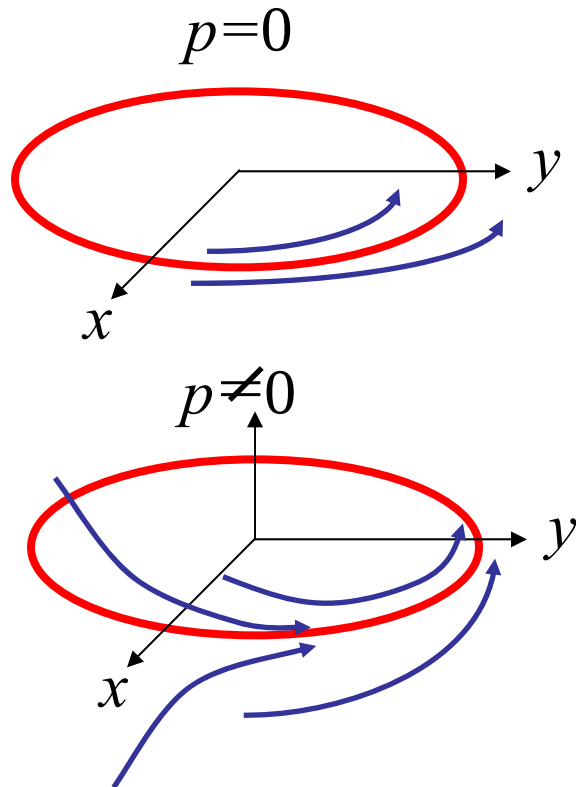
$$\dot{z} = b + z(x - c)$$

Metodas neinvazinis



• Matlabo animacija

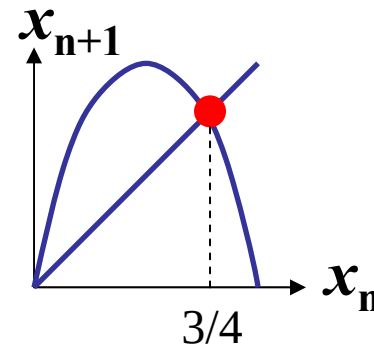
UGRV stabilizacijos mechanizmo paaiškinimas



Stabilizacija pasiekama per papildomus laisvės laipsnius, kuriuos įneša į sistemą uždelstas grįžtamasis ryšys !

Paprastas pavyzdys:

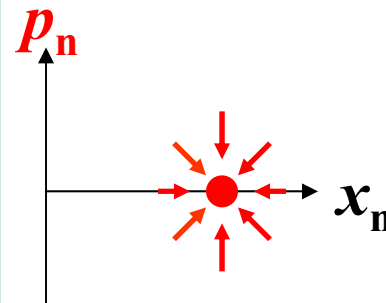
$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) - Kp_n, \quad p_n = x_n - x_{n-1}$$



$$p_n = 0$$



$$p_n \neq 0$$



Stabilumo sąlyga:

$$-1 < K < -1/2$$

Metodo eksperimentinės realizacijos

Elektroniniai chaoso generat.

- Pyragas, Tamaševičius (1993)
- Gauthier et al. (1994)
- Kittel et. al. (1994)
- Celka (1994)
- Socolar et al. (1994)
- Benner et al. (1997)
- Sukow et al. (1997)
- Chang et al. (1998)
- Just et al. (1999, 2000)
- Loewenich et al. (2004)
- Boccaletti et al. (2004)
- Choe et al. (2005)
- Ahlborn, Parlitz (2006)
- Hoehne et al. (2007)
- Tamaševičius et al. (2007)
- Loewenich et al. (2010)

Lazeriai

- Belawski et al. (1994)
- Erneux et al. (1995)
- Lu, Yu, Harrison (1998)
- Arecchi et al. (2002)
- Boccaletti et al. (2004)
- Bielawski et al. (2005)
- Schikora et al. (2006, 2008)
- Dahms et al. (2010)
- Schicora at al. (2011)

Cheminės reakcijos

- Schneider et al. (1993)
- Parmananda et al. (1999)
- Tsui, Jones (2000)
- Kiss et al. (2000)
- Kim et al. (2001)
- Bertram et al. (2003)
- Beta et al. (2003)
- Kiss et al. (2006, 2008)

Metodo eksperimentinės realizacijos

Mechaninės svyruoklės

- Hikihara, Kawagoshi (1996)
- Christini et al. (1997)
- Sieber et al. (2008)

Dujų išlydis

- Pierre et al. (1996)
- Mausbach et al. (1997)
- Wei et al. (2004)

Plazma

- Gravier et al. (1999)
- Fukuyama et al. (2002)
- Fukuyama et al. (2006)

Feromagnetinis rezonansas

- Ye et al. (1995)
- Benner et al. (1997)

Nuolatinės įtampos keitiklis

- Natsheh et al. (2009)

Žingsniuojantis robotas



- Sugimoto, Osuka (2002)

Kardiologinės sistemos

- Hall et al. (1997)
- Rappel et al. (1999)
- Berger et al. (2007)

Skysčių turbulencija

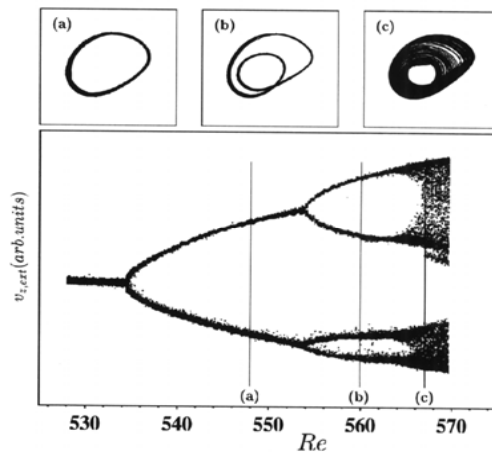
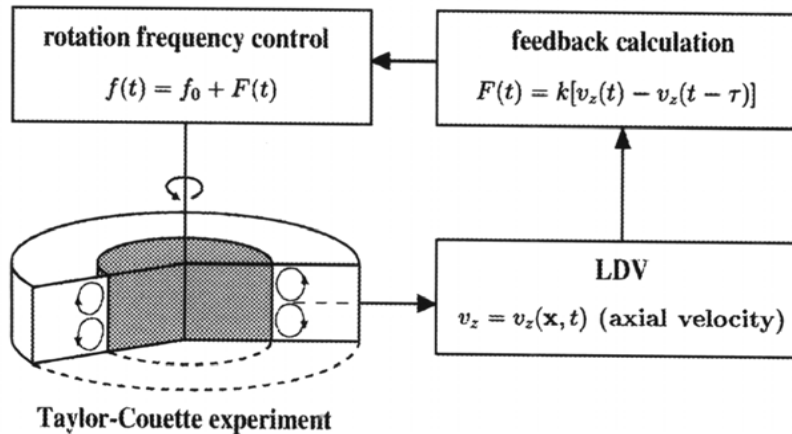
- Lüthje et al. (2001)

Atominių jėgų mikroskopas

- Yamasue et al. (2009)

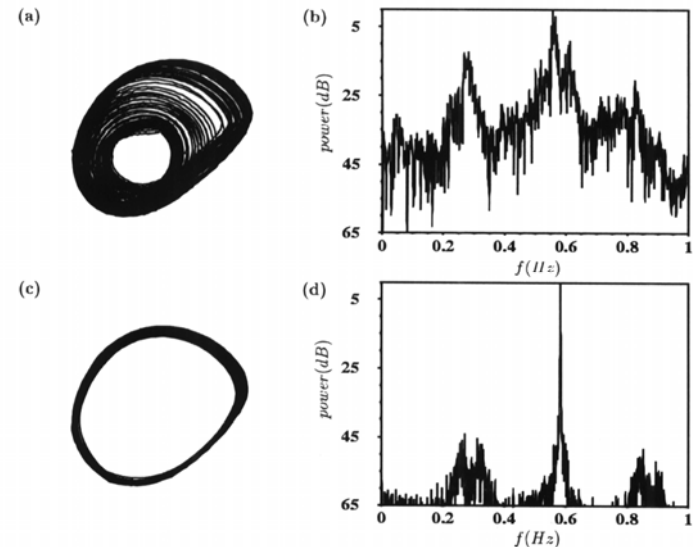
Turbulencijos valdymas Taylor-Couette eksperimente

O.Lüthje, S. Wolf, and G. Pfister, PRL (2001)



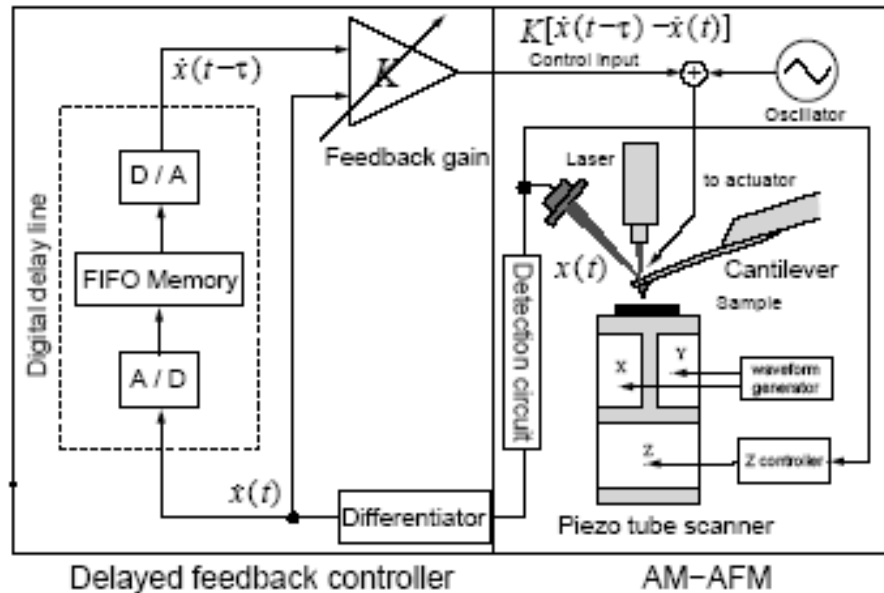
$$Re = 2\pi f (r_o - r_i) r_i / \nu$$

$v_z(\mathbf{x}, t)$ - išėjimas (aksialinis greitis)
 f - valdymo parametras

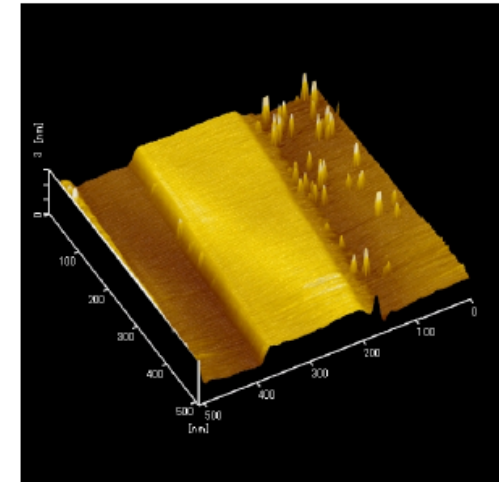


Chaos valdymas atominių jėgų mikroskope

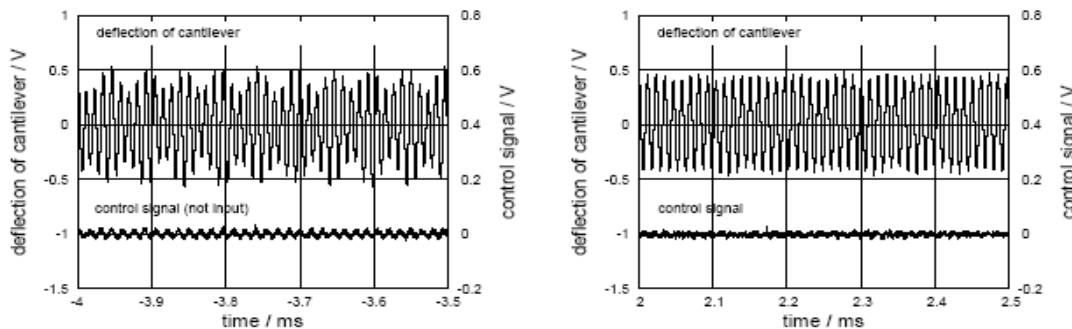
K.Yamasue et al. (2009)



Padidėjimas
~ 5 000 000

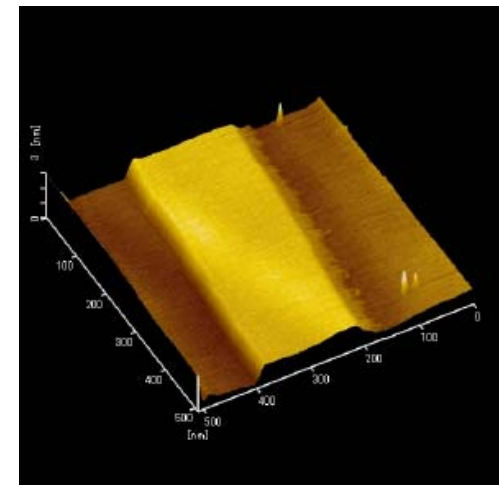


Vaizdas be valdymo



be valdymo

su valdymu



Vaizdas su valdymu

UGRV metodo taikymo perspektyvos (teoriniai siūlymai)

- **Skrendančio palydovo orientacijos valdymas**
A. P.M. Tsui , A. J. Jones, Physica D (1999)
- **Skęstančių laivų valdymas** 
K. Mitsubori, K. Aihara, Proc. R. Soc. A (2002);
- **Ekonominio chaoso valdymas**
L. Chen, G. Chen, (2006) - konkuruojančių firmų valdymas
C. Wieland et al. (2003) - centrinio banko valdymas.
- **Interneto routerio buferio persipildymo valdymas**
L. Chen, XF. Wang, ZZ. Han (2002)
K. Jiang, X. F. Wang, Y. Xi (2007)
- **Parkinsono ligos gydymas**
M. Rosenblum, A. Pikovsky, Phys. Rev. Lett. (2004)
O. Popovich, C. Hauptmann, P. Tass, Phys. Rev. Lett. (2005)