

NETIESINĖS DINAMINĖS SISTEMOS

- I. NETIESINĖS DINAMIKOS PAGRINDAI**
- II. CHAOSO TEORIJA IR JOS TAIKYMAI**

Lireratūra:

I. NETIESINĖS DINAMIKOS PAGRINDAI

- K. Pyragas. *Netiesinės dinamikos pagrindai*, virtuali leidykla-knygynas, www.Skaityk.lt, 2003.
- А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Е Хайкин. *Теория колебаний*. Москва Наука, 1981.

II. CHAOSAS IR FRAKTALAI

- M. Cross. *Chaos on the web*, http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/
- С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Москва Физматлит, 2001 (Knyga yra internete: <http://www.fizmatlit.narod.ru/webrary/kuzn/kuzn.htm>).

Šių paskatų skaidres galima pasiimti mano asmeninėje svetainėje:

<http://pyragas.pfi.lt/>

Netiesinės dinamikos pagrindai

• ĮVADAS

- *Istorinė apžvalga, dinaminių sistemų klasifikavimas.*

• PIRMOSIOS EILĖS SISTEMOS

- *Grafinis tyrimo metodas, rimties taškai ir stabilumas, populiacijų gausėjimas.*

• ANTROSIOS EILĖS SISTEMOS

- *Fazinis portretas, rimties taškai ir lygčių linearizavimas, konkurencijos modelis, ribiniai ciklai, van der Polio generatorius, relaksaciniai ir kvaziharmoniniai virpesiai.*

ĮVADAS

*Bet kurio mokslo tikslas yra gamtos reiškinių
klasifikavimas ir **prognozė**.*

*Prognozei naudojami **dinaminiai modeliai**.*

Dinaminės sistemos sąvoka:

1. $X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ – *dinaminiai kintamieji*
2. $L(t)$ – *evoliucijos operatorius (difer. arba skirt.)*

$$X(t) = L(t) X(0)$$

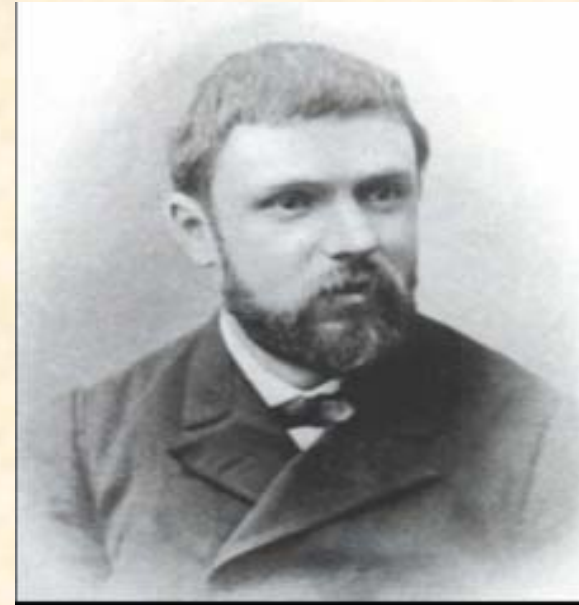
Istorinė apžvalga

1666	Newton Leibniz	Integralinio ir diferencialinio skaičiavimo atradimas, planetų judėjimo paaiškinimas.
1700-ieji		Klasikinės mechanikos bei diferencialinio ir integralinio skaičiavimo plėtojimas.
1800-ieji		Analiziniai planetų judėjimo tyrimai.
1890-ieji	Poincaré	Kokybiniai diferencialiniu lygčių tyrimo metodai, grafinis metodas, chaoso užuomazgos.
1920 -1950		Netiesiniai virpesių generatoriai; radijo, radaro bei lazerio atradimas.
1920 -1960	Birkhof Kolmogorov Arnold Moser	Sudėtingas elgesys Hamiltoninėje mechanikoje.

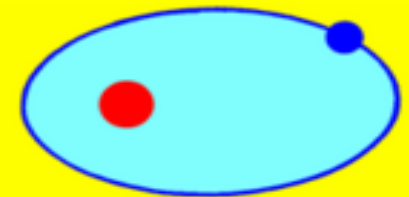
1963	Lorenz	Keistasis atraktorius paprastame konvekcijos modelyje.
1970-ieji	Ruelle Takens	Turbulencija ir chaosas.
	May	Logistinis atvaizdas – paprastas chaotinės sistemos pavyzdys.
	Feigenbaum	Universalumas ir renormalizacija, fazinių virsmų ir chaoso teorijų sąryšis.
		Eksperimentiniai chaotinių sistemų tyrimai.
1980 - ...	Mandelbrot	Fraktalai.
		Personalinių kompiuterių atsiradimas. Platus susidomėjimas chaosu ir jo taikymais.

Henri Poincare ir trijų kūnų problema

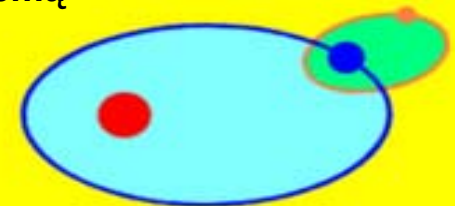
- Apsistosisime šiek tiek detaliau ties dinaminio chaoso atsiradimo **istorija**. 1887 m. švedų karalius paskelbė konkursą moksliniam darbui, kuris turėjo atsakyti į klausimą „**ar mūsų saulės sistema yra stabili?**“
- Konkursą laimėjo prancūzų fizikas ir matematikas Puankarė (**Henri Poincare**).
- Laimėjęs konkursą Puankarė pastebėjo, kad padarė klaidą ir beveik visus premijos pinigus panaudojo tam, kad pakeisti viso žurnalo leidinį, kuriame buvo atspausdinti klaidingi rezultatai.
- Puankarė nagrinėjo trijų kūnų problemą (tarkime Saulė, Žemė ir Mėnulis) ir parodė, kad judėjimas gali būti labai sudėtingas (pagal šiuolaikinę terminologiją chaotinis).
- Trijų kūnų judėjimo **animacija**



Henri Poincare (1854 - 1912)



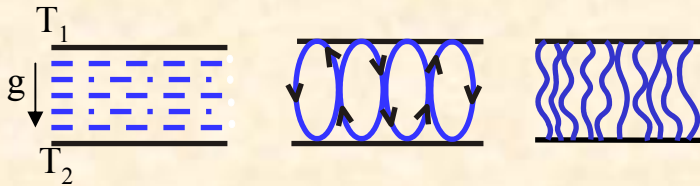
Niutonas išsprendė dviejų kūnų problemą



Puankarė parodė, kad trijų kūnų problemą yra „neišsprendžiama“

Lorenz'o keistasis atraktorius (1963)

Benard'o nestabilumas

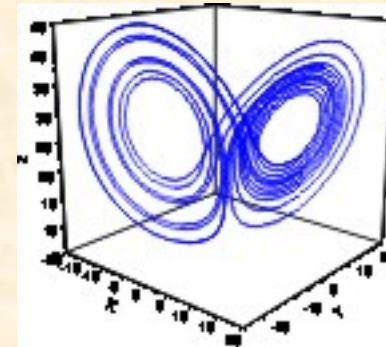


Lorenz'o modelis

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

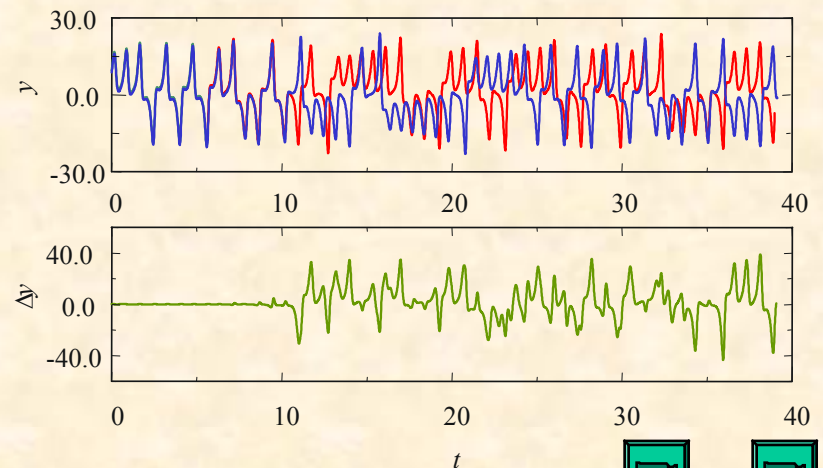
$$\dot{z} = xy - bz$$



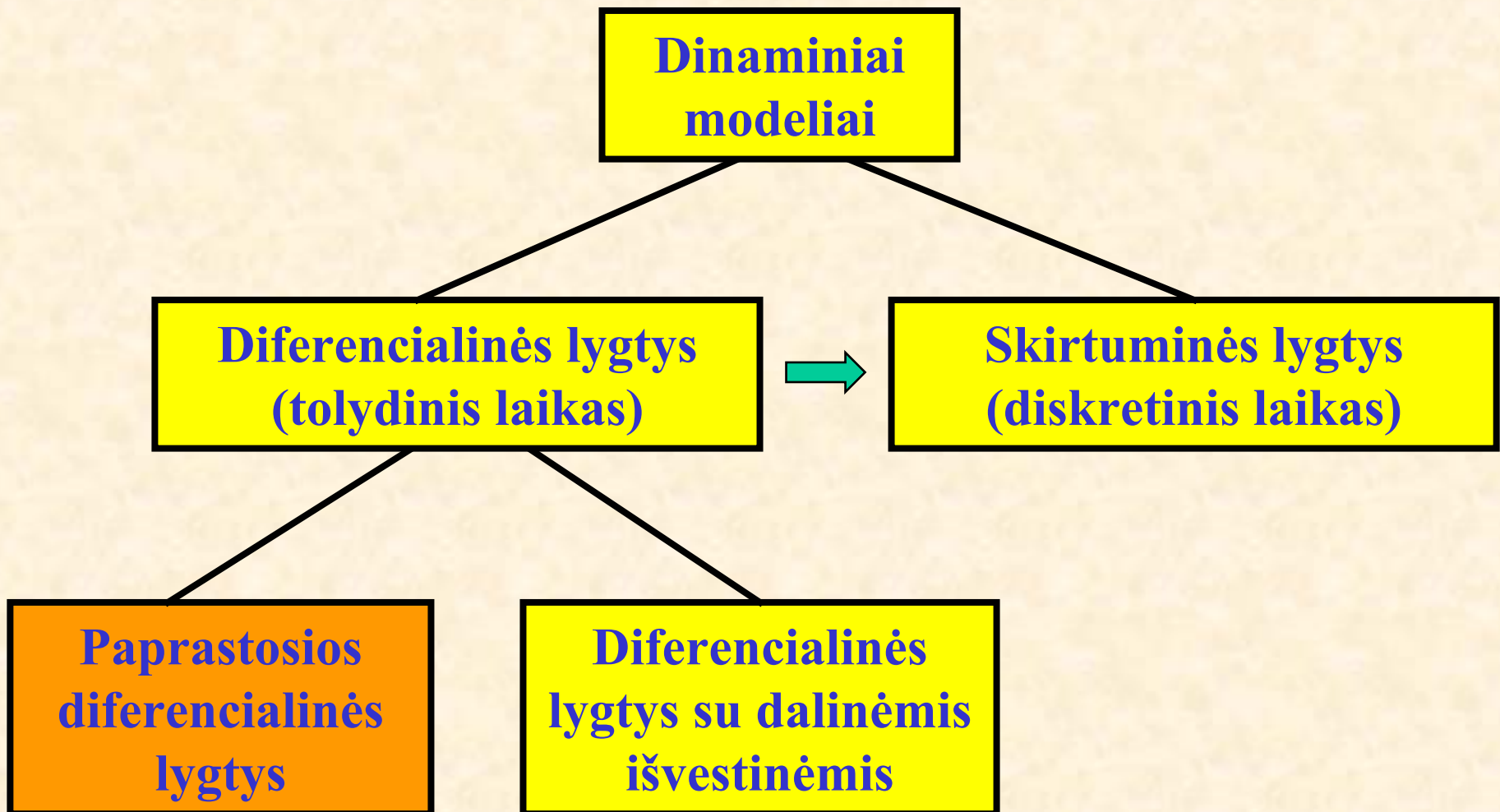
Drugelio



efektas



Dinaminių sistemų klasifikavimas



Pagrindinis netiesinės dinamikos tyrimo objektas

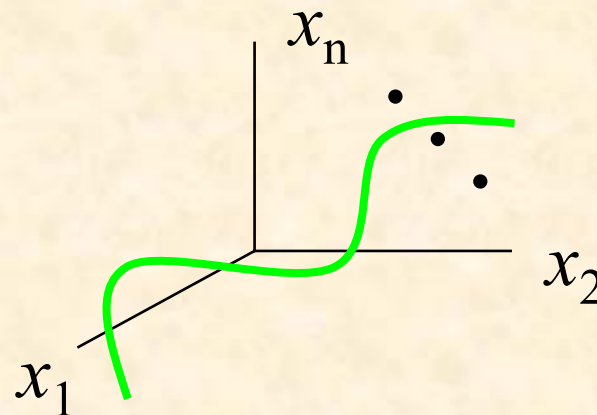
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

n eilės dinaminė sistema
(normalinis pavidalas)

$$\dot{x}_k \equiv \frac{dx_k}{dt}$$

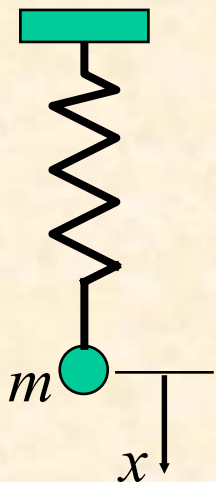
$(x_1, \dots, x_n)$ - dinaminiai kintamieji

n - laisvės laipsnių skaičius (fazinės erdvės dimensija)



Pavyzdžiai

Tiesinė svyruoklė



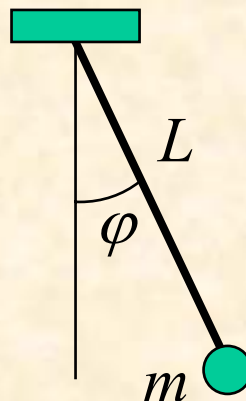
$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

Matematinė svyruoklė



$$mL\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1$$

Kaip tirti netiesinius uždavinius?

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L} \sin x_1\end{aligned}$$

1. *Pamėginti išspręsti analiziškai (elipsinės f.)*

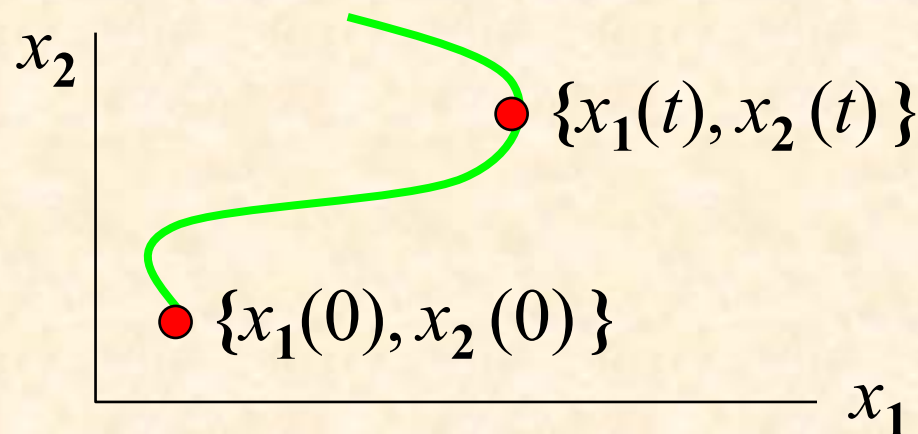
2. *Supaprastinti uždavinį*

$$\sin x_1 \approx x_1$$

(gauname tiesinį uždavinį)

3. *Grafinis metodas*

$\{x_1(t), x_2(t)\}$ – *sist. sprend*



4. *Skaitmeninė analizė*

(tapo populiari, kai atsirado personaliniai kompiuteriai)

Neautonominės sistemos

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, \mathbf{t}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, \mathbf{t}).\end{aligned}$$

Neautonominė svyruoklė:

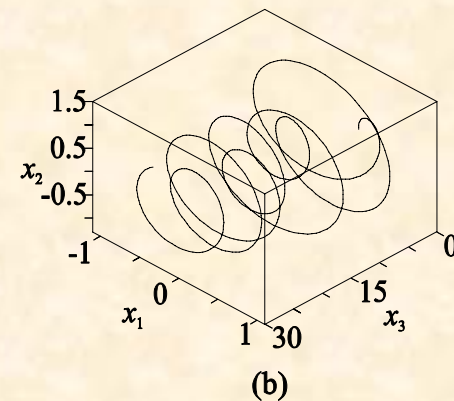
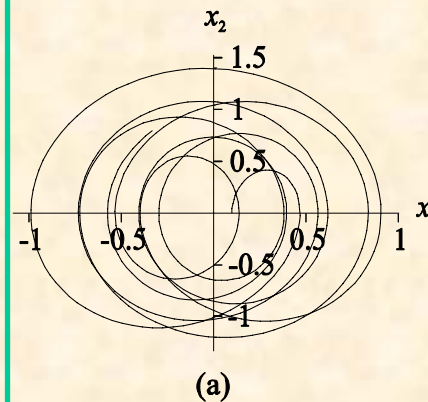
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = A \cos \omega t$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{A}{m}\cos \omega t\end{aligned}$$

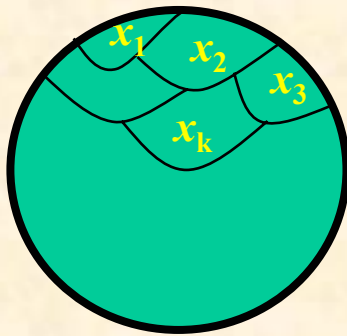
$$x_3 = \omega t$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{A}{m}\cos x_3 \\ \dot{x}_3 &= \omega\end{aligned}$$



Kodėl netiesiniai uždaviniai sudėtingi?

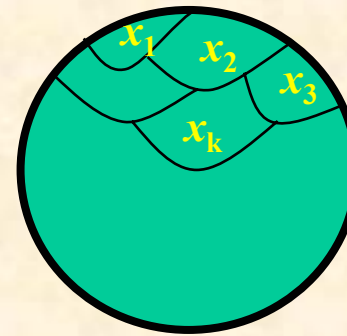
Tiesinės sistemos



Galioja superpozicijos principas:

$$X = \sum_k C_k x_k$$

Netiesinės sistemos



Negalioja superpozicijos principas:

$$X \neq \sum_k C_k x_k$$

“Dinaminis” požiūris į mokslą

Kintamųjų skaičius →

$n = 1$

$n = 2$

$n \geq 3$

$n \gg 1$

Kontinuumas ($n \rightarrow \infty$)

Netiesiškumas ↓ Netiesinės	Tiesinės	<i>pusiausvyra</i>	<i>Virpesiai</i>	<i>reiškiniai</i>	<i>Bangos</i>	
		Radioaktyvusis skilimas. Populiacijų gausėjimas. RC grandinė.	Tiesinės svyruoklės. RLC grandinė. Dviejų kūnų problema (Kepler, Newton).	Radiotechninės grandinės.	Susietosios harmoninės svyruoklės. Kietojo kūno fizika. Molekulių dinamika. Statistinė fizika.	Banginės lygtys. Elektrodinamika. Kvantinė mechanika. Šilumos sklaidimas ir difuzija. Akustika. Klampieji skysčiai.
		<i>Artėjimas prie pusiausvyros</i>	<i>Autovirpesiai</i>	<i>Chaosas</i>	<i>Mokslo frontas</i>	<i>Erdviškosios ir lai- kiškosios struktūros</i>
		Rimties taškai. Bifurkacijos. Relaksacinės sistemos. Logistinė lygtis.	Ribiniai ciklai. Matematinė svyruoklė. Netiesinės svyruoklės. Elektroniniai autogeneratoriai.	Keistieji atraktoriai. Trijų kūnų problema (Poincaré). Cheminės reakcijos. Iteraciniai atvaizdai. Neautonominės netiesinės svyruoklės.	↓ Susietosios netiesinės svyruoklės. Lazeriai ir netiesinė optika. Netiesinė statistinė mechanika. Netiesinė kietojo kūno fizika. Širdis. Neuroniniai tinklai. Ekologija. Ekonomika.	↓ Netiesinės bangos (solitonai). Plazma. Žemės drebėjimai. Bendroji reliatyvumo teorija. Kvantinio lauko teorija. Skysčių turbulencija. Fibriliacija. Epilepsija. Gyvybė.

Pirmosios eilės sistemos

$$\dot{x} = f(x)$$

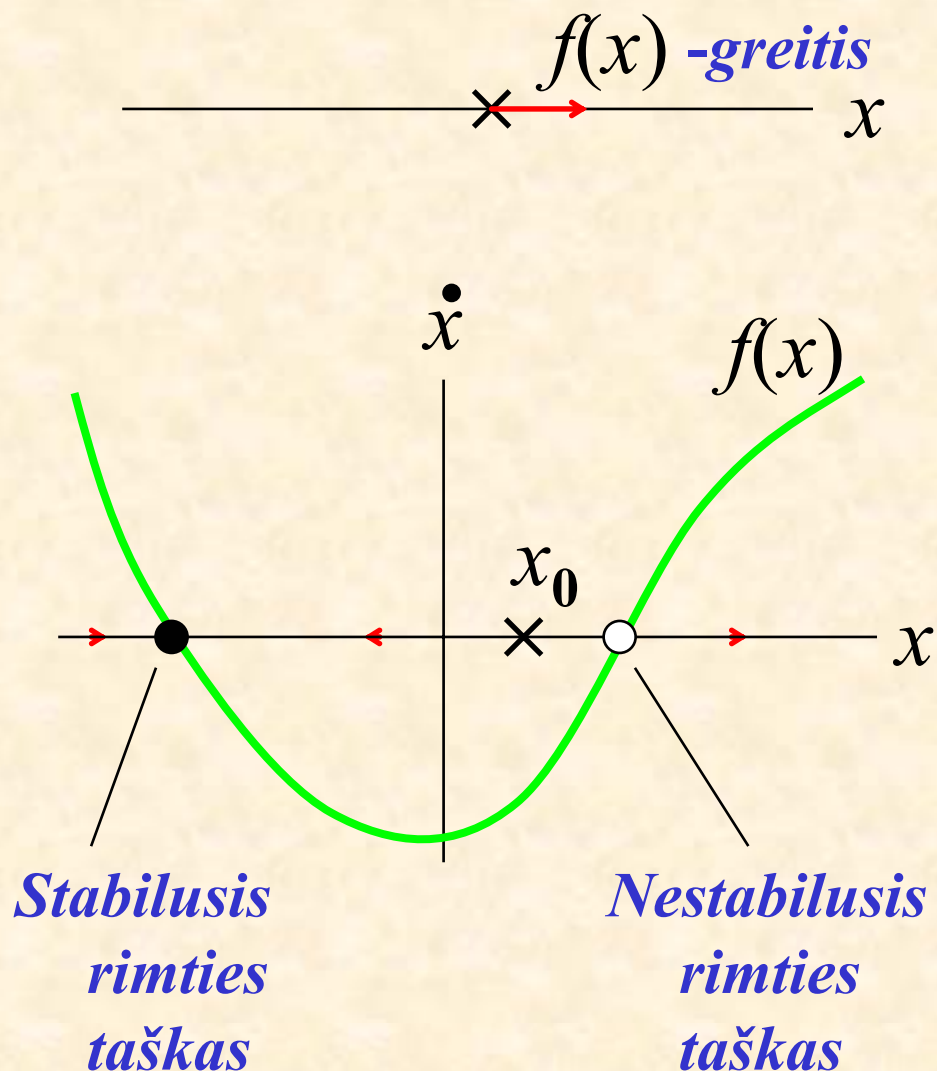
*Kintamųjų atskyrimo metodu
galima išspręsti analiziškai:*

$$t = \int \frac{dx}{f(x)} + C$$

Problemos:

- 1. Ne visuomet pavyksta
suintegruoti integralą*
- 2. Gaunama priklausomybė
 $t = \varphi(x)$ o ne $x = \psi(t)$*

Grafinis metodas



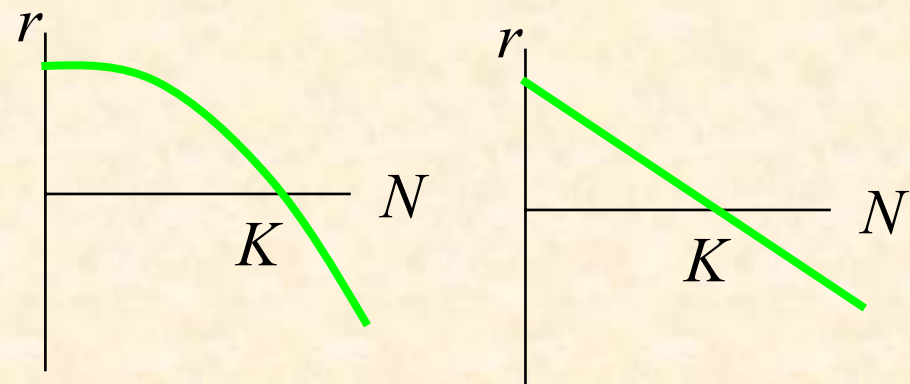
Populiacijų gausėjimas

Jeigu pakanka erdvės ir maisto, tai prieaugis yra proporcingas kiekiui:

$$\dot{N} = rN \Rightarrow N = N_0 e^{rt}$$

$$\dot{N}/N = r = \text{const}$$

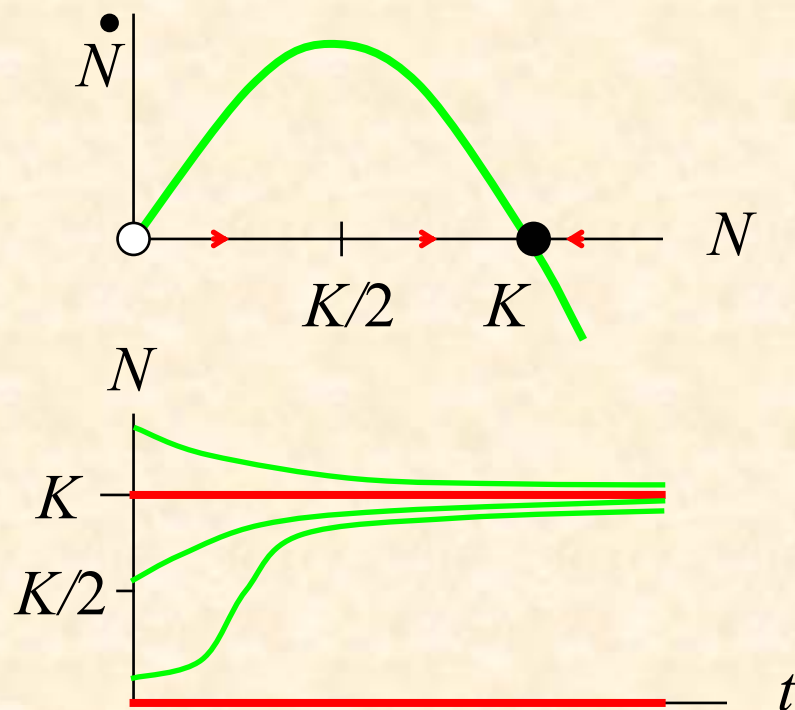
Augimo ribojimas: $r = r(N)$



$$r \rightarrow r(1 - N/K)$$

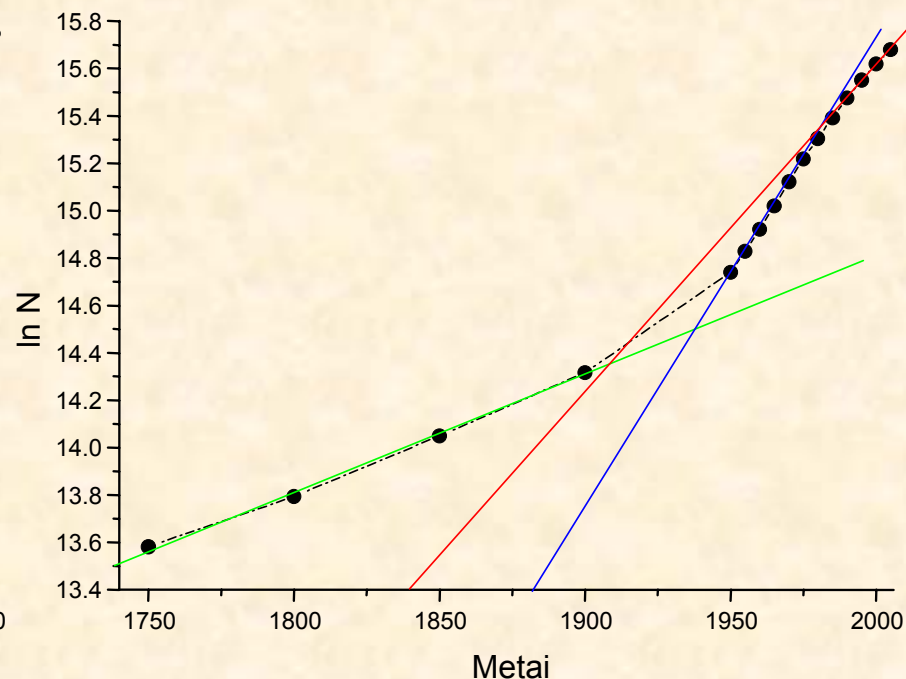
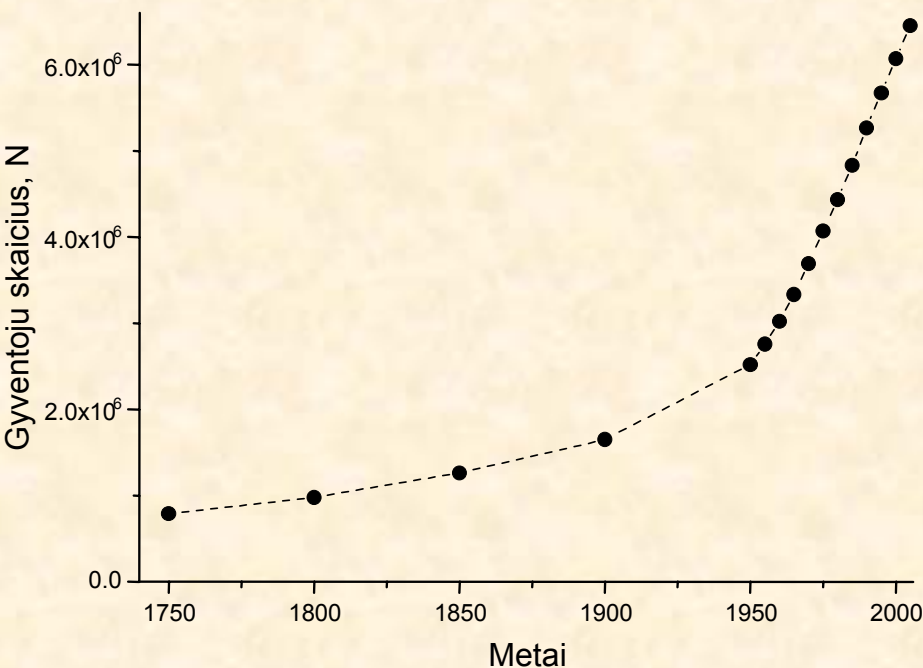
Logistinė lygtis (Verhulst, 1838):

$$\dot{N} = rN(1 - N/K)$$



Žmonių populiacijos gausėjimas

(http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Population)



Santykinis gausėjimo greitis:

$$r = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \frac{d(\ln N)}{dt}$$

(1750-1900): $r = 0.52\%/m$, $\tau = 133m$

(1950-1975): $r = 2\%/m$, $\tau = 35m$

(1975-2005): $r = 1.4\%/m$, $\tau = 50m$

Dvigubinimosi periodas:

$$N = N_0 e^{rt} \rightarrow N(\tau) = 2N_0 \rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{r}$$

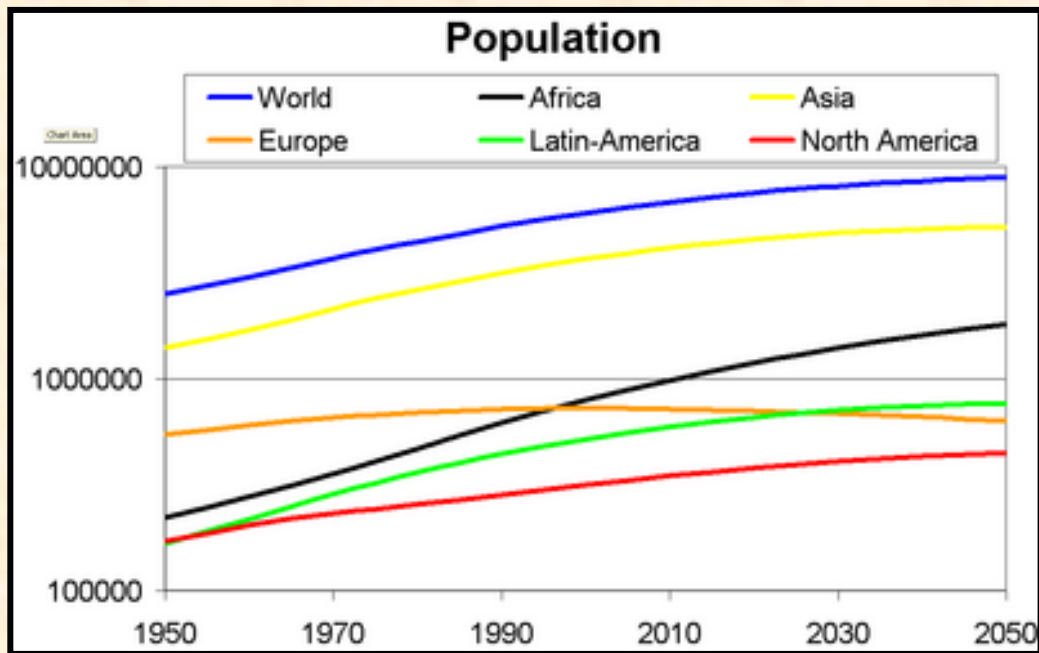
Dabar absoliutus prieaugis: 80 mln. žm./m

Žmonių populiacijos prognozė

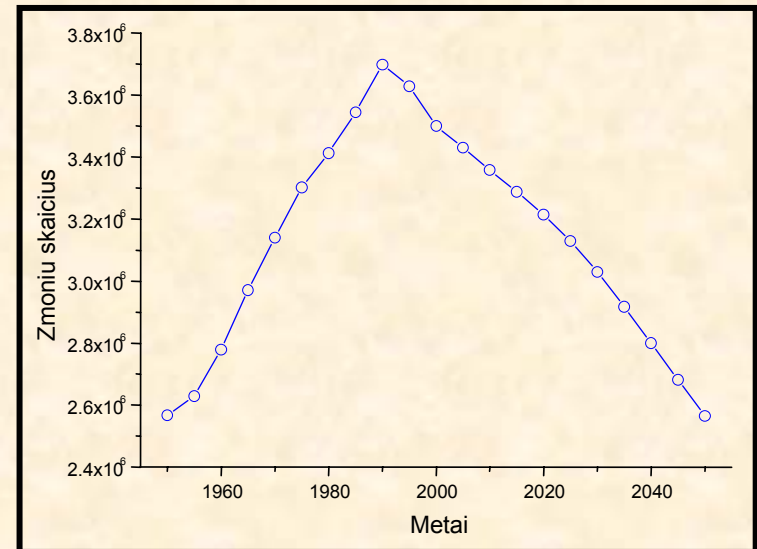
(http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Population)

(<http://esa.un.org/unpp/>)

Pasaulis



Lietuva



Tiesinė stabilumo analizė

$$\dot{x} = f(x)$$

x^* - rimties taškas, t.y. $f(x^*) = 0$

$\Delta = x - x^*$ - mažas nuokrypis

$$\begin{aligned}\dot{\Delta} &= \dot{x} = f(x^* + \Delta) = \\ &= \cancel{f(x^*)} + \Delta f'(x^*) + \cancel{o(\Delta^2)}\end{aligned}$$

$$\dot{\Delta} = \Delta f'(x^*) \Rightarrow \Delta = \Delta_0 e^{t f'(x^*)}$$

$f'(x^*) > 0$ - nestabilusis R.T.

$f'(x^*) < 0$ - stabilusis R.T.

$\tau = 1/|f'(x^*)|$ - charakteringasis laikas

Logistinė lygtis

$$\dot{N} = rN(1 - N/K) = f(N)$$

R.T.: $f(N) = 0 \Rightarrow N_1^* = 0, N_2^* = K$

$$f'(N) = r(1 - 2N/K)$$

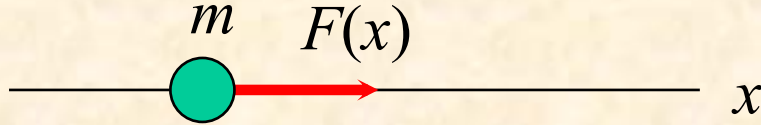
$$N_1^* = 0 \quad f'(0) = r > 0$$

Nestabilusis rimties taškas, $\tau = 1/r$

$$N_2^* = K \quad f'(K) = -r < 0$$

Stabilusis rimties taškas, $\tau = 1/r$

Potencialas

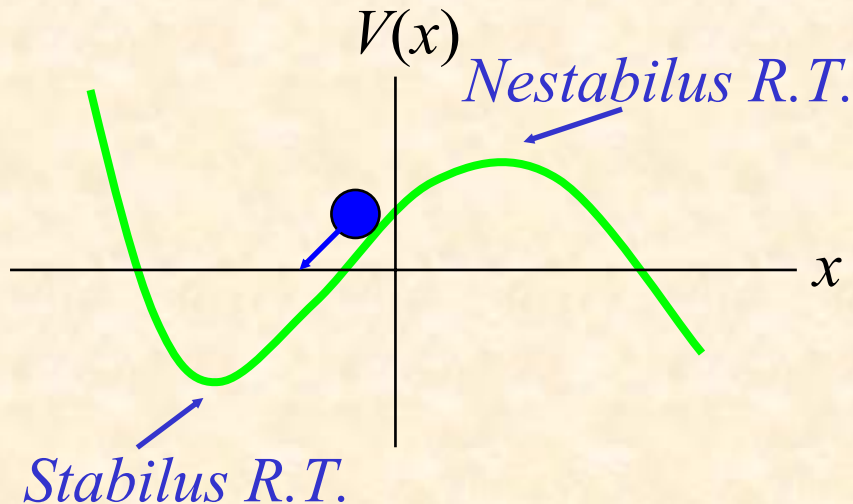


$$\cancel{m\ddot{x}} + b\dot{x} = F(x) \equiv -\frac{dU}{dx}$$

$$m\ddot{x} \ll b\dot{x}$$

$$F(x)/b = f(x), U(x)/b = V(x)$$

$$\dot{x} = f(x) \equiv -\frac{dV}{dx}$$

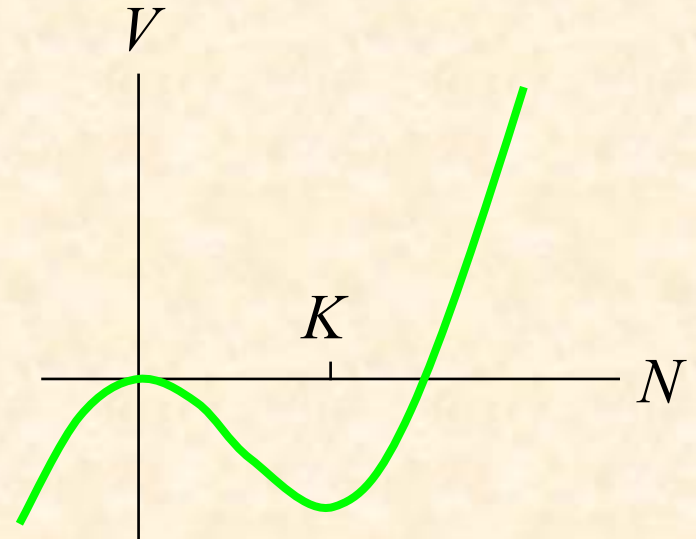


Logistinė lygtis

$$\dot{N} = rN(1 - N/K) = f(N)$$

$$V(N) = -\int rN(1 - N/K) dN$$

$$V = -rN^2/2 + rN^3/3K$$

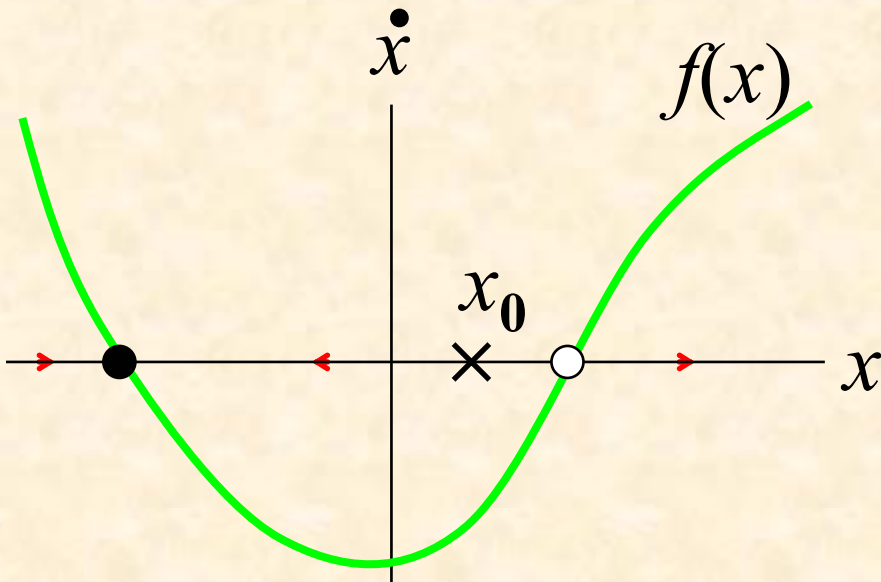


Virpesių nebuvimas

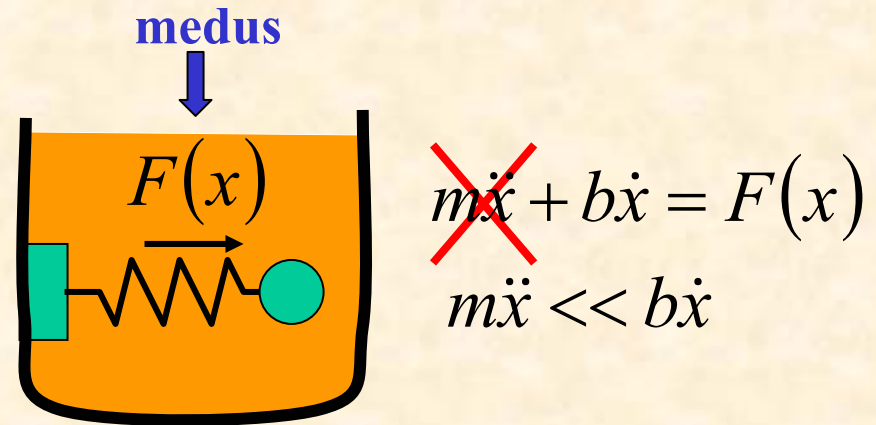
Pirmosios eilės sistemose nėra osciliuojančių sprendinių!

Grafinė iliustracija:

$$\dot{x} = f(x)$$



Mechaninė iliustracija:



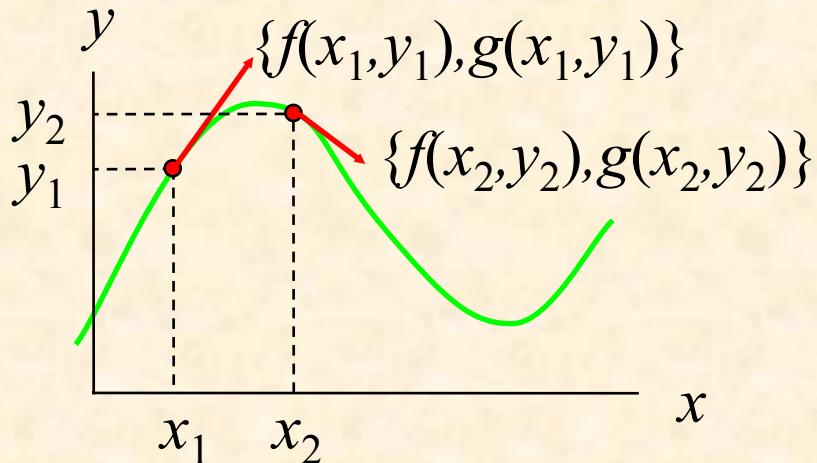
$$\dot{x} = f(x) \equiv F(x)/b$$

**Virpesiai neįmanomi
dėl didelės trinties!**

Antrosios eilės sistemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

$$(x, y) \longrightarrow (\dot{x}, \dot{y})$$



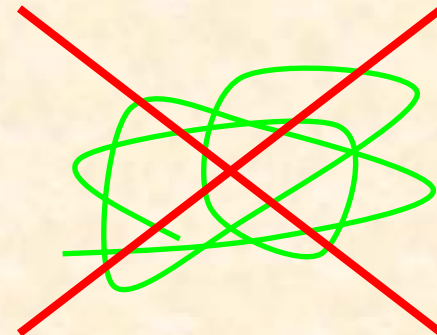
*Kaip kokybiškai pavaizduoti
sistemos trajektorijas?*

1. Izoklinių metodas

2. Linearizacijos metodas

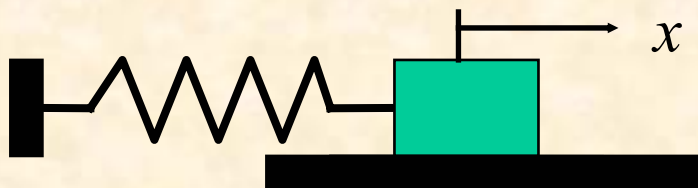
*Svarbi savybė išplaukianti iš
sprendinio vienaties teoremos:*

*Trajektorijos fazinėje
plokštumoje negali kirstis!*



Izoklinių metodas

Tiesinė svyruoklė



$$\ddot{x} + x = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$(x, y) \rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = (y, -x)$$

Nulinės izoklinės:

1. Horizontalusis laukas ($\dot{y} = 0$):

$x = 0$ – tai yra y ašis

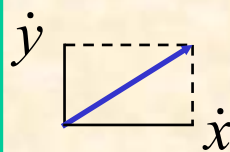
$$(\dot{x}, \dot{y}) = (y, 0) = y(1, 0)$$

2. Vertikalusis laukas ($\dot{x} = 0$):

$y = 0$ – tai yra x ašis

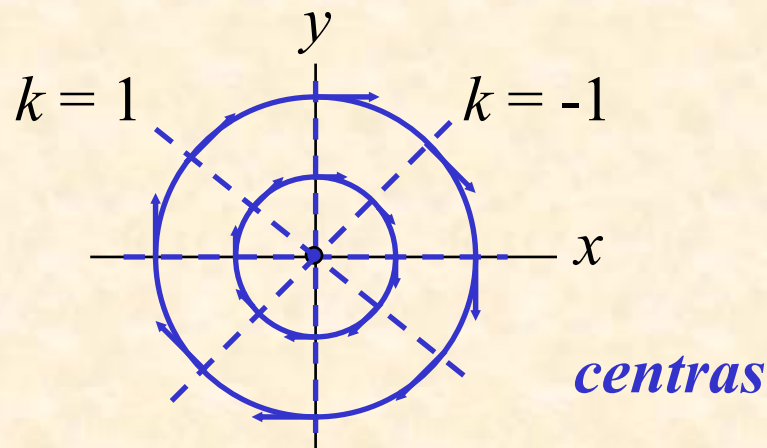
$$(\dot{x}, \dot{y}) = (0, -x) = x(0, -1)$$

Bendras izoklinės apibrėžimas:



$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = k = \text{const}$$

$$y = -x/k \rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) = -x(1/k, 1)$$



Rimties taškai ir lygčių linearizavimas

$$\dot{x} = f(x, y)$$

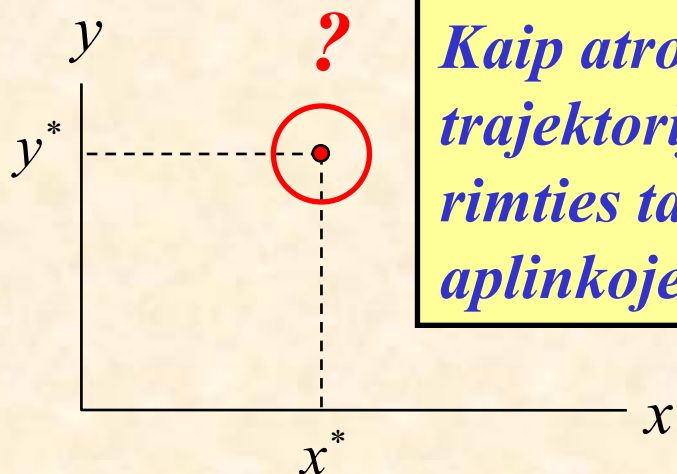
$$\dot{y} = g(x, y)$$

Rimties taškai:

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$$

$$f(x^*, y^*) = 0$$

$$g(x^*, y^*) = 0$$



*Kaip atrodo
trajektorijos
rimties taško
aplinkoje?*

Lygčių linearizavimas

$$(\delta x, \delta y) = (x - x^*, y - y^*)$$

$$\begin{aligned}\delta \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial x} f(x^*, y^*) \delta x + \frac{\partial}{\partial y} f(x^*, y^*) \delta y + \cancel{O(r^2)} \\ \delta \dot{y} &= \frac{\partial}{\partial x} g(x^*, y^*) \delta x + \frac{\partial}{\partial y} g(x^*, y^*) \delta y + \cancel{O(r^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x & \partial f / \partial y \\ \partial g / \partial x & \partial g / \partial y \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

Jakobio
matrica

Tiesinės sistemos

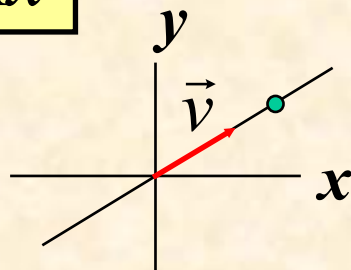
$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

$$\vec{x} = e^{\lambda t} \vec{v}$$



$$\dot{\vec{x}} = \lambda e^{\lambda t} \vec{v} \quad \lambda e^{\lambda t} \vec{v} = e^{\lambda t} A\vec{v}$$

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

*Matricos A
tikrinių verčių
uždavinys*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}(a - \lambda)v_x + bv_y &= 0 \rightarrow v_y = v_x(a - \lambda)/b \\ cv_x + (d - \lambda)v_y &= 0 \rightarrow v_x = v_y(d - \lambda)/c\end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

*Charakterin-
goji lygtis*

$$\sigma = \text{Tr}A = a + d$$

$$\Delta = \det A = ad - bc$$

$$\lambda_{1,2} = \sigma/2 \pm \sqrt{\sigma^2/4 - \Delta}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \text{Tr}A = a + d$$

$$\Delta = \det A = ad - bc$$

$$\lambda_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}$$

$$\lambda_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_1 - a \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_2 - a \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - d \\ c \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - d \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (b = c = 0) \\ \lambda_1 = a, \lambda_2 = d$$

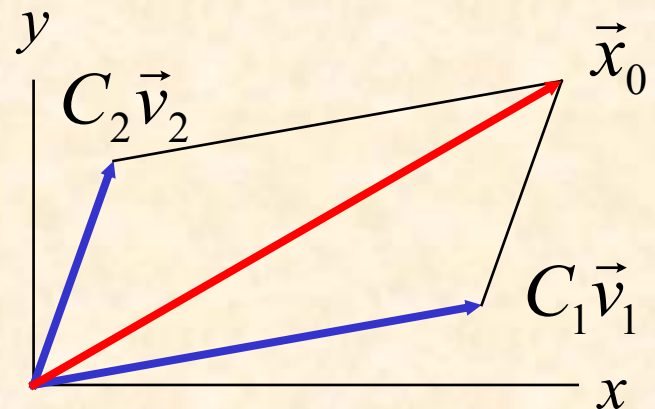
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bendrasis sprendinys:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

Konstantos C_1 ir C_2 nustatomos iš pradinės sąlygos $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$:

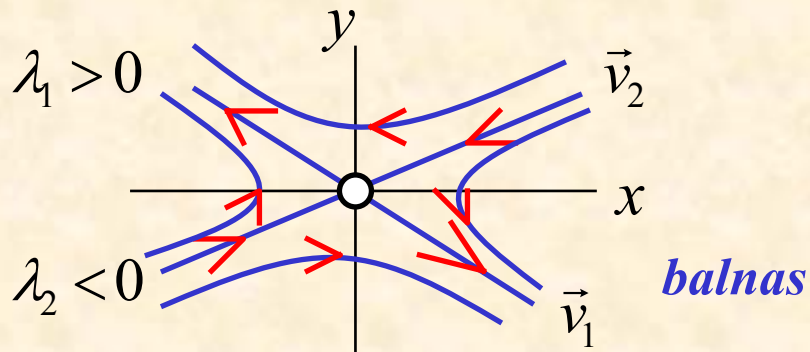
$$\vec{x}_0 = C_1 \vec{v}_1 + C_2 \vec{v}_2$$



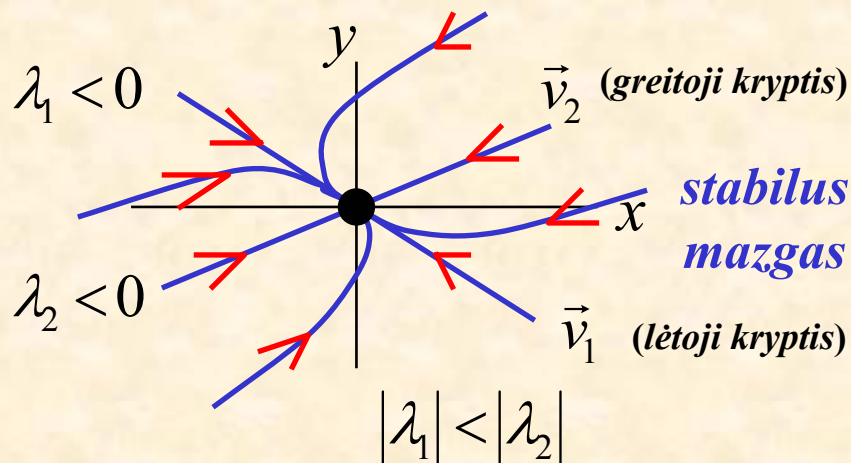
Sprendinių $\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}$ klasifikavimas

1. λ_1 ir λ_2 *realieji* ($\Delta < \sigma^2/4$)

a) λ_1 ir λ_2 *skirtingų ženklų*



b) λ_1 ir λ_2 *to paties ženklo*

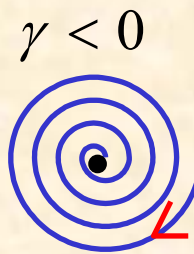


2. λ_1 ir λ_2 *kompleksiniai* ($\Delta > \sigma^2/4$)

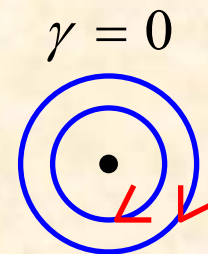
$$\gamma = \frac{\sigma}{2} \quad \omega^2 = \Delta - \frac{\sigma^2}{4}$$

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\omega$$

$$e^{(\gamma \pm i\omega)t} = e^{\gamma t} (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$



stabilioji spiralė



centras



nestabilioji spiralė

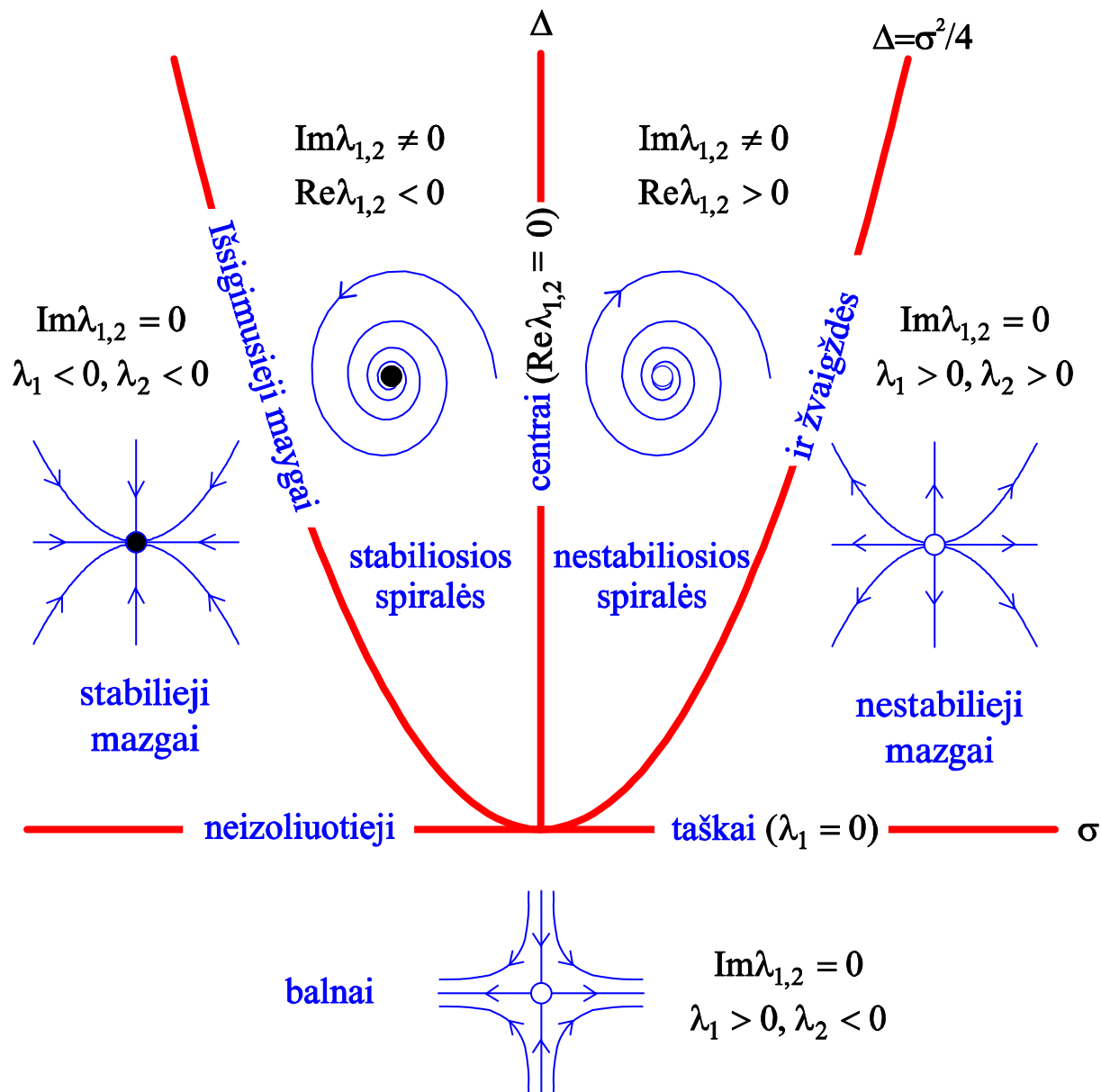
Rimties taškų klasifikacinė diagrama

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \Delta$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta}$$



Konkurencijos modelis

Lotka ir Voltera modelis

$x(t)$ – triušių sk. laiko momentu t

$y(t)$ – avių sk. laiko momentu t

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} &= 2y - y^2 - xy\end{aligned}$$

Rimties taškai:

$$\begin{aligned}x(3 - x - 2y) &= 0 \\ y(2 - y - x) &= 0\end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0) & (0,2) \\ (3,0) & (1,1) \end{matrix}$$

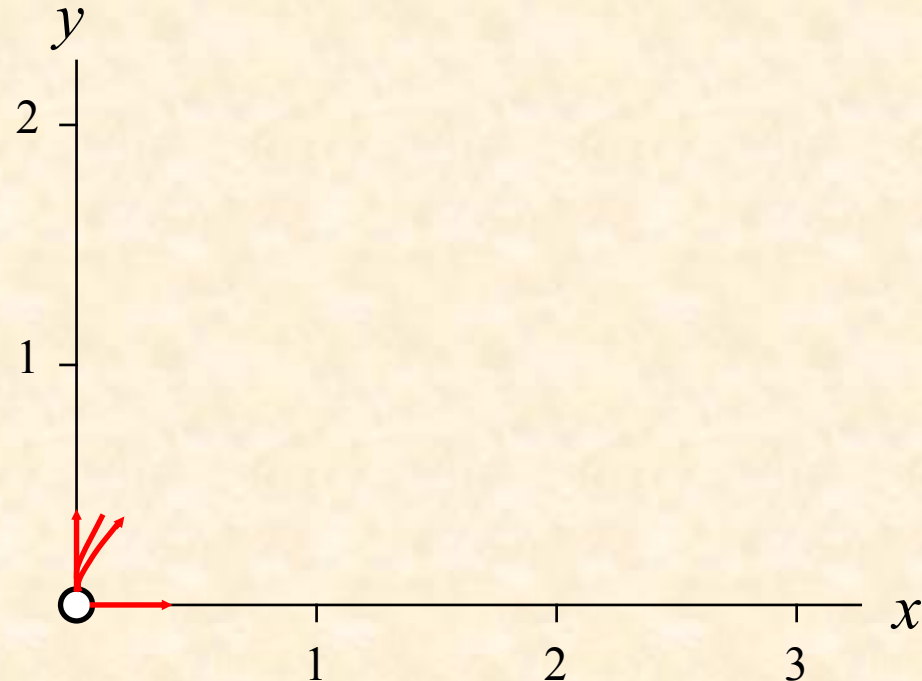
Jakobianas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

$$(0,0) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{nestabilusis mazgas}$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Konkurencijos modelis

$$(0,2) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{stabilusis mazgas}$$

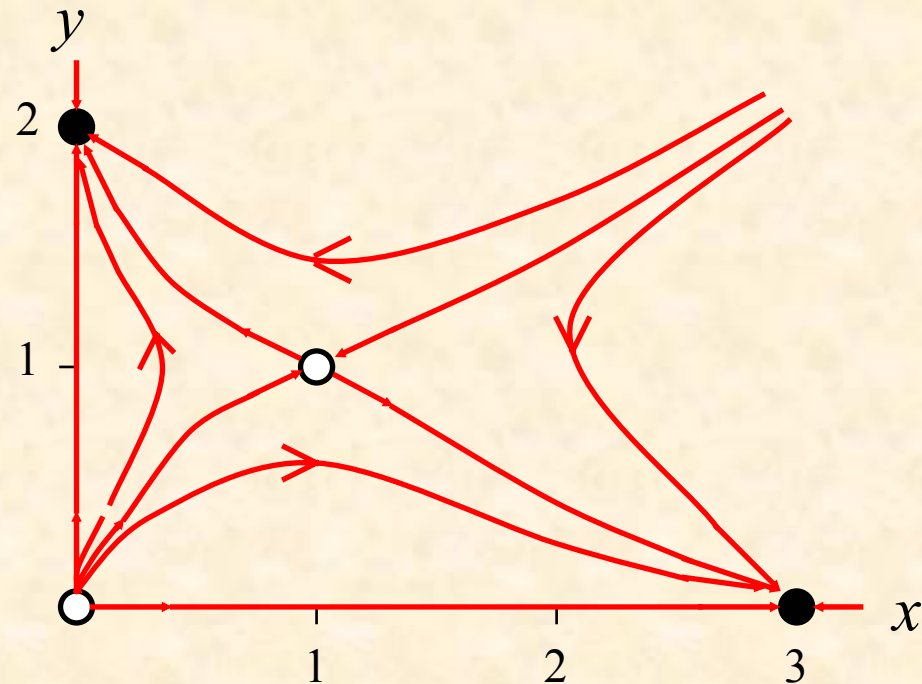
$$\lambda_1 = -1, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -2, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3,0) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{stabilusis mazgas}$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -1, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1,1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \textit{balnas}$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}, \quad \vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$



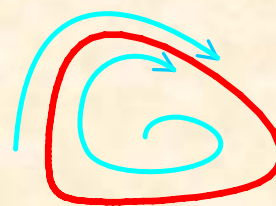
Ribiniai ciklai (autovirpesiai)

*Autovirpesiai – tai **savaime** atsirandantys sistemoje periodiniai virpesiai, **kai jų neveikia jokios periodinės jėgos.***

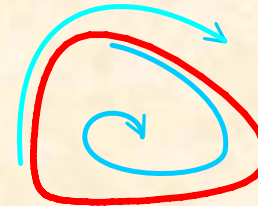
*Nusistovėjusių autovirpesių amplitudė ir dažnis **nepriklauso nuo pradinių sąlygų.***

*Fazinėje erdvėje autovirpesiai atitinka **ribinį ciklą** (Andronov)*

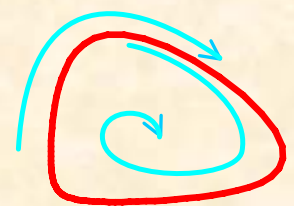
*Ribiniu ciklu vadinama **izoliuota uždara fazinės erdvės trajektorija.***



Stabilusis ciklas



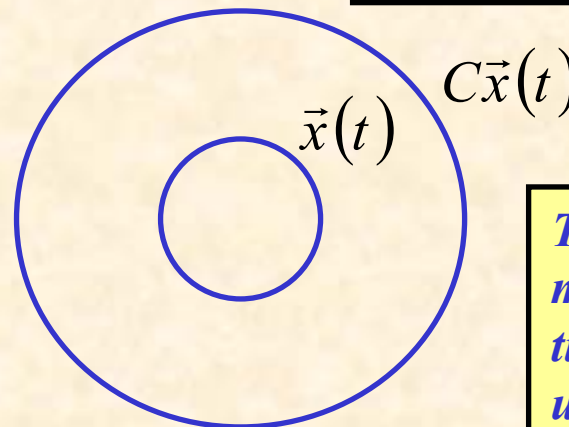
Nestabilusis ciklas



Pusiausis ciklas

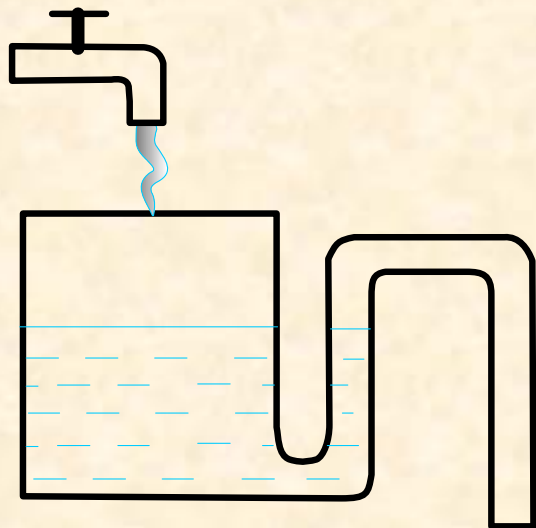
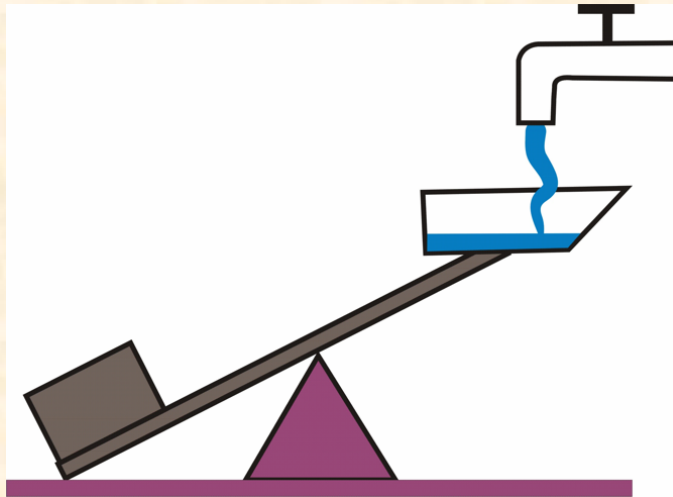
Autovirpesiai gali atsirasti tik netiesinėse sistemose!

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$



*Tiesinėse sistemose gali būti tik **neizoliuotos** uždaros orbitos!*

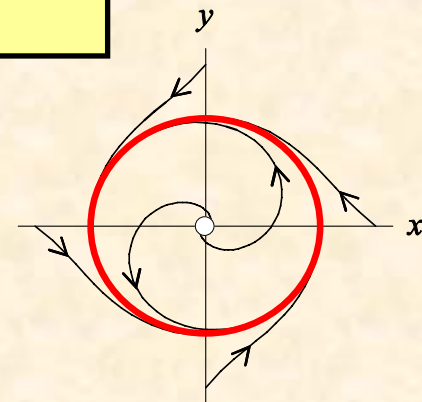
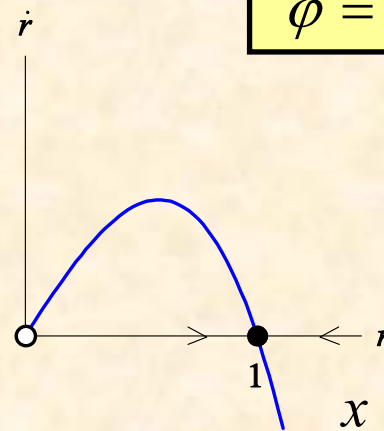
Autovirpesinių sistemų pavyzdžiai



*Parastas modelis: ribinis ciklas
polinėse koordinatėse*

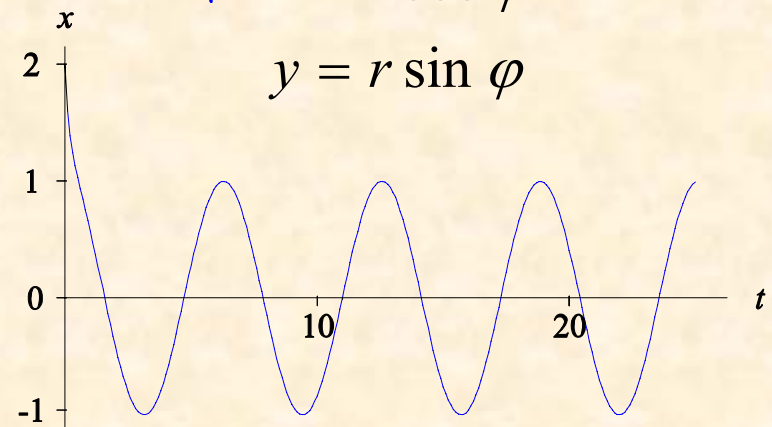
$$\dot{r} = r(1 - r^2)$$

$$\dot{\phi} = 1$$

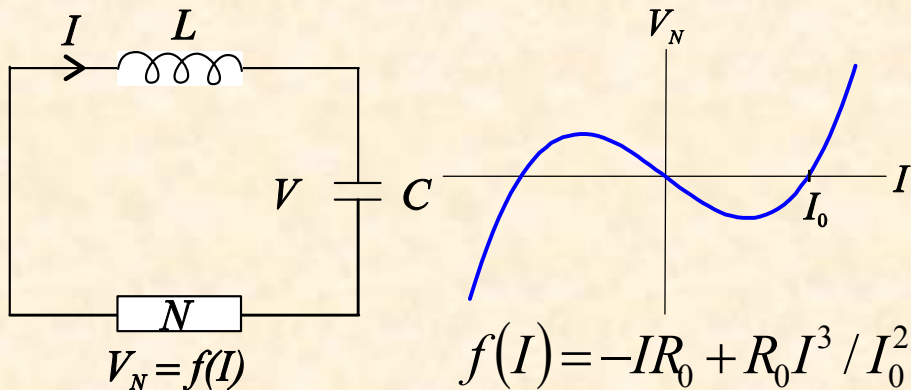


$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$



Van der Polio generatorius



$$\begin{aligned} L\dot{I} + V + f(I) &= 0 \\ C\dot{V} &= I \end{aligned}$$

$$L\ddot{I} + I/C + \left(3R_0 I^2 / I_0^2 - R_0\right)\dot{I} = 0$$

Bedimensiniai kintamieji:

$$x = \sqrt{3}I / I_0, \quad \tau = t / \sqrt{LC},$$

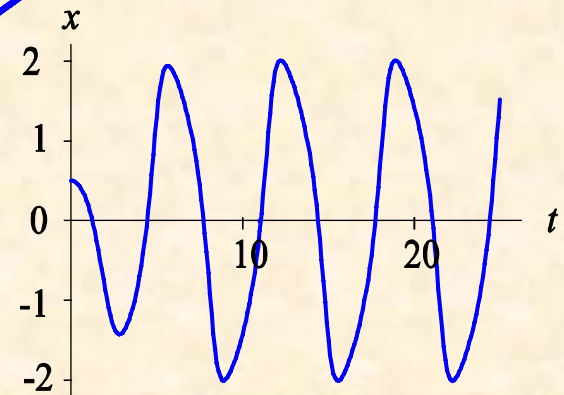
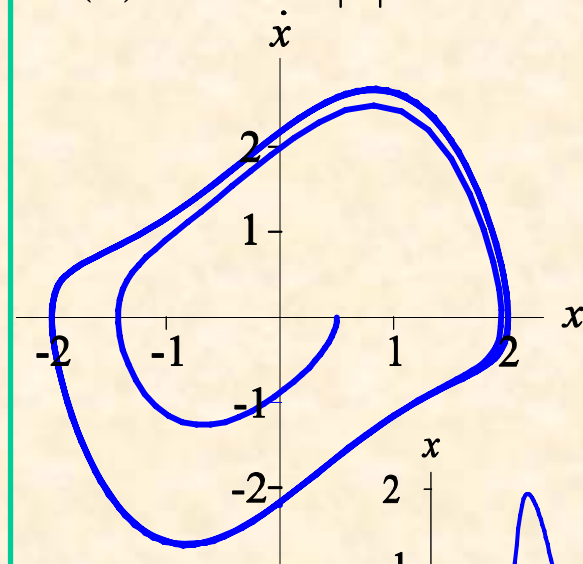
$$\mu = R_0 / \sqrt{L/C}$$

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Van der Polio lygtis

$b(x) = \mu(x^2 - 1)$ - netiesinis trinties koef.

$b(x) < 0$, kai $|x| < 1$, $b(x) > 0$, kai $|x| > 1$



Relaksaciniai virpesiai

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

$$\mu \gg 1$$

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} = \frac{d}{dt} \left\{ \dot{x} + \mu \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right] \right\}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$$

$$\dot{x} + \mu F(x) = \mu y$$

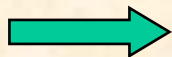
$$\dot{x} = \mu[y - F(x)] \quad (\text{greitas})$$

$$\dot{y} = -x/\mu \quad (\text{lėtas})$$

$$\mu \rightarrow \infty$$

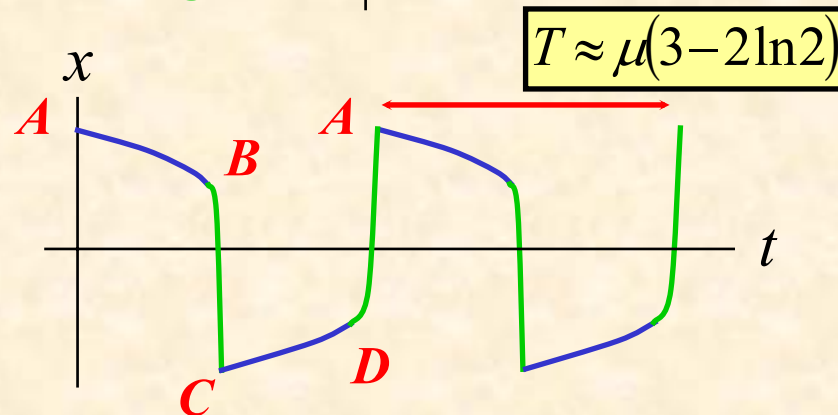
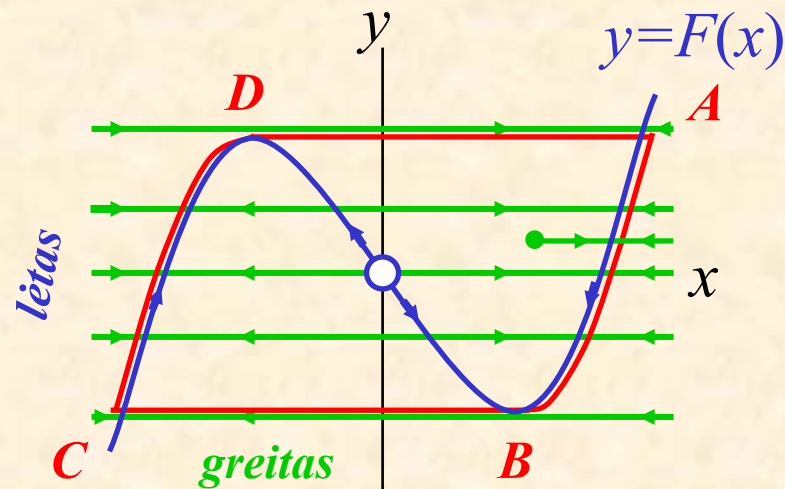
$$y - F(x) = 0$$

$$\dot{y} = 0$$



$$y = F(x)$$

$$y = \text{const}$$



Periodas: $T \approx 2 \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{dt}{dy} \frac{dy}{dx} dx$

$$T \approx 2 \int_{x_A}^{x_B} \frac{\mu}{x} F'(x) dx = -2\mu \int_2^1 \frac{x^2 - 1}{x} dx$$

Kvaziharmoniniai virpesiai

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

$$\varepsilon \ll 1$$

Standartine trikdžių teorija
nepavyksta gauti konverguojančio
asimptotinio sprendinio, kai $t \rightarrow \infty$.
Todėl taikomas **dviejų laikų** arba
harmonikų balanso metodas.

Harmonikų balanso metodas

$$\varepsilon = 0: \quad \ddot{x} + x = 0 \Rightarrow x(t) = r \cos(t + \varphi)$$

$$\varepsilon \neq 0: \quad x(t) = r(t) \cos[t + \varphi(t)]$$

$r(t), \varphi(t)$ - lėtai kintančios funkcijos

$$\dot{r}(t) \propto \varepsilon, \quad \dot{\varphi}(t) \propto \varepsilon$$

$$\cos[t + \varphi(t)] = \frac{1}{2} [e^{i\varphi(t)} e^{it} + e^{-i\varphi(t)} e^{-it}]$$

$$A(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$$

**lėtai kintanti
kompleksinė
amplitudė**

$$\dot{A}(t) \propto \varepsilon$$

$$x(t) = [A(t) e^{it} + A^*(t) e^{-it}] / 2$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= [(\cancel{\ddot{x}} + 2i\dot{A}) e^{it} + c.j.] / 2 = \\ &= i[\dot{A} e^{it} + \dot{A}^* e^{-it}] + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\dot{x} = i[A e^{it} - A^* e^{-it}] / 2 + o(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{4} (A e^{it} + A^* e^{-it})^2 - 1 \right\} \times \\ &\quad \times \frac{i}{2} (A e^{it} - A^* e^{-it}) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Kvaziharmoniniai virpesiai

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$$

$$i[\dot{A}e^{it} + \dot{A}^*e^{-it}] + \varepsilon\left\{\frac{1}{4}(Ae^{it} + A^*e^{-it})^2 - 1\right\}\frac{i}{2}(Ae^{it} - A^*e^{-it}) + o(\varepsilon^2) = 0$$

e^{it} :

$$\dot{A} + \frac{\varepsilon}{2}A\left\{\frac{|A|^2}{4} - 1\right\} = 0$$

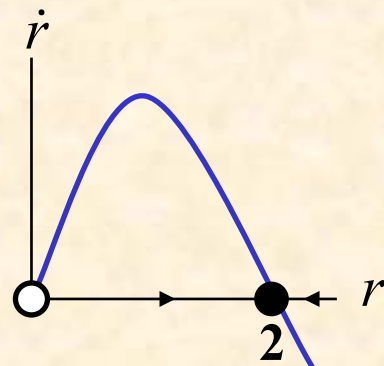
$$A = re^{i\varphi}, \quad \dot{A} = (\dot{r} + ir\dot{\varphi})e^{i\varphi}$$

$$\dot{r} = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)$$

$$\dot{\varphi} = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 = \text{const}$$

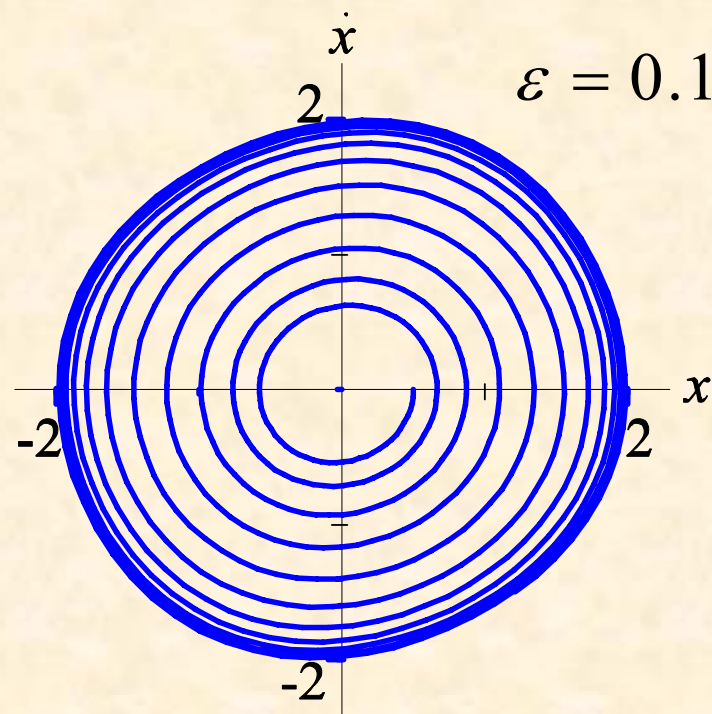
$$x(t) = r(t)\cos(t + \varphi_0)$$



$$r(t) \rightarrow 2$$

$$t \rightarrow \infty$$

*Skaitmeninis rezultatas
tiesiogiai integruojant lygtį:*



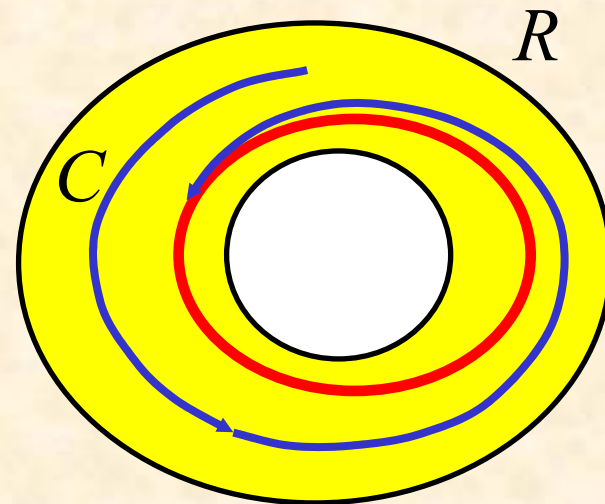
Chaoso nebuvimas

Puankarė ir Bendiksono teorema

Tarkime kad:

1. R yra aprėžta uždara plokštumos sritis.
2. $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ yra tolydžiai diferencijuojamas vektorinis laukas $\vec{x} \in R$.
3. R srityje nėra rimties taškų.
4. Egzistuoja R srityje “uždaryta” trajektorija C , kuri prasideda toje srityje ir pasilieka joje visam laikui.

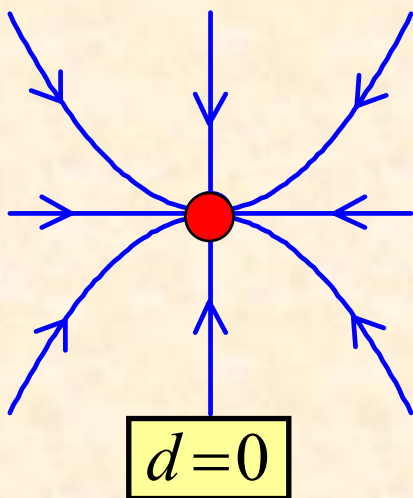
Tuomet trajektorija C asimptotiškai artėja prie ribinio ciklo, kai $t \rightarrow \infty$.



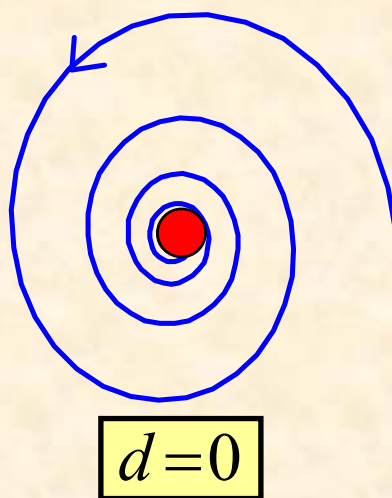
Antrosios eilės sistemose negali būti chaoso!

Dinaminių sistemų atraktorių klasifikavimas

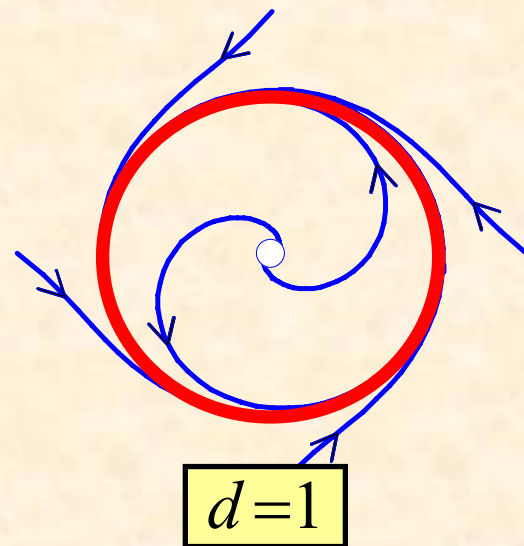
stabilus mazgas



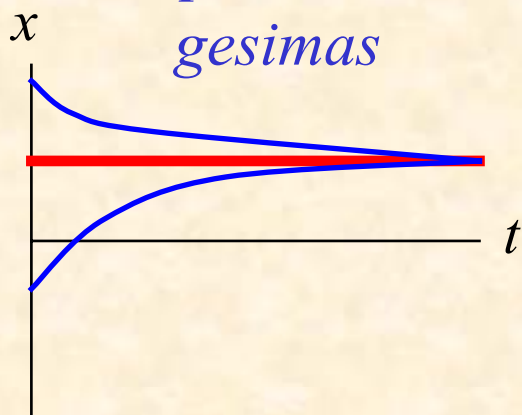
stabili spiralė



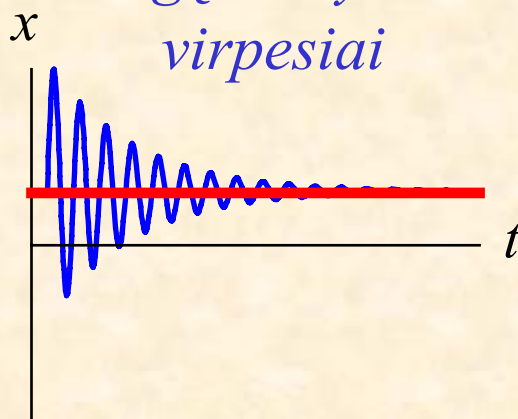
stabilus ribinis ciklas



*eksponentinis
gesimas*



*gęstantys
virpesiai*



autovirpesiai

