

Fizikinė kinetika ir chaoso teorija

- Įvadas

- Chaoso teorijos pagrindai

Kas yra chaosas

Eksponentinė artimų trajektorijų divergencija

Prognozės trukmė

Fazinio tūrio evoliucija

Pavyzdys: Lorencio sistemos fazinio tūrio evoliucija

Hamiltoninių sistemų fazinio tūrio evoliucija

- Chaosas hamiltoninėse sistemose

Judėjimo integralai ir integruojamos sistemos

KAM (Kolmogorov, Orndorf, Moser) teorijos iliustracijos

Periodiškai smūgiuojamas rotorius

Fizikinė kinetika ir chaoso teorija

- **Paprasti matematiniai chaoso modeliai**

- Pirmos eilės atvaizdai

- Pjūklo danties atvaizdas

- Atvaizdų Liapunovo rodikliai

- Antros eilės atvaizdai

- Kepėjo atvaizdas

- Modelinė Boltzmano kinetinė lygtis ir H-teorema

- Arnoldo katino atvaizdas

Ivadas

- Tradiciškai manoma, kad fizikoje statistinius metodus galima taikyti tik tuomet, kai sistemoje yra daug dalelių. Tačiau tam tikros netiesinės dinaminės sistemos su nedideliu laisvės laipsnių skaičiumi gali elgtis chaotiškai. Toks elgesys yra sąlygotas dinaminėmis sistemos savybėmis ir savaime atsiranda neveikiant sistemos atsitiktinėmis jėgomis. Dinaminį chaosą taip pat galima aprašyti statistinės fizikos metodais.
- Šiuolaikinis mokslas teigia, kad atsitiktinumai sistemose su dideliu laisvės laipsnių skaičiumi, kurias tradiciškai tiria statistinės fizikos mokslas, yra sąlygoti dinaminio chaosu. Tad **chaoso mokslas yra svarbus statistinės fizikos pagrindimui**. Jis iš esmės paaiškina kaip deterministinėje sistemoje gali atsirasti negrįžtamas elgesys.
- Šiame skyriuje pradžioje aptarsime pagrindines chaoso savybes. Suskirstysime dinamines sistemas į **disipatyvias ir konservatyvias**. Konservatyvios sistemos pasižymi tuo, kad jų fazinis tūris nekinta. Šiai klasei priklauso **hamiltoninės** sistemos, kuriomis remiasi statistinės fizikos mokslas. Todėl tokioms sistemoms skirsime pagrindinį dėmesį.
- Statistinės fizikos metodų taikymą paprastoms dinaminėms sistemoms su chaotiniu elgesiu pademonstruosime periodiškai **smūgiuojamo rotoriaus uždaviniu**. Parodysime, kad šį uždavinį galima suvesti į Fokero-Planko lygtį.
- Pabaigoje aptarsime paprastus matematinius chaoso modelius. Šie modeliai padeda geriau suprasti chaoso reiškinių. Kita vertus, šiais modeliais mes pademonstruosime negrįžtamą dinaminių sistemų elgesį. Mes išvesime lygtį, analogišką Boltzmano kinetinei lygčiai ir įrodysime Boltzmano H-teoremą.

Chaos teorijos pagrindai (I)

Kas yra chaosas?

Chaosu vadinamas nereguliarus dinaminių sistemų elgesys.

Pagrindinė chaotinio elgesio savybė: **artimos trajektorijos fazinėje erdvėje eksponentiškai greitai prasiskiria (Drugelio efektas).**

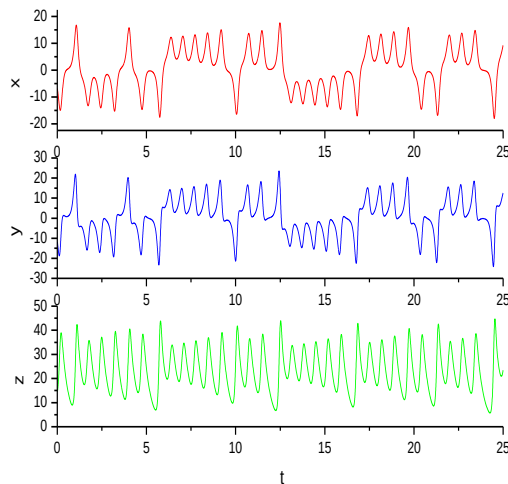
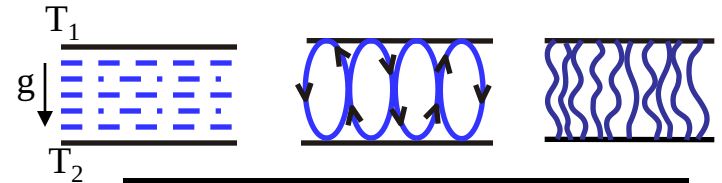
Būtina chaoso sąlyga – **netiesiškumas.**

Chaotinių sistemų pavyzdžiai:

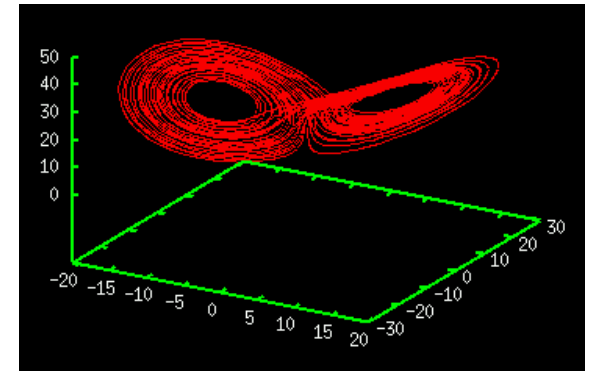
- Teniso rutuluko šokinėjimas ant periodiškai virpančios rakėtės



- Lorenzo sistema (Benardo nestabilumas)



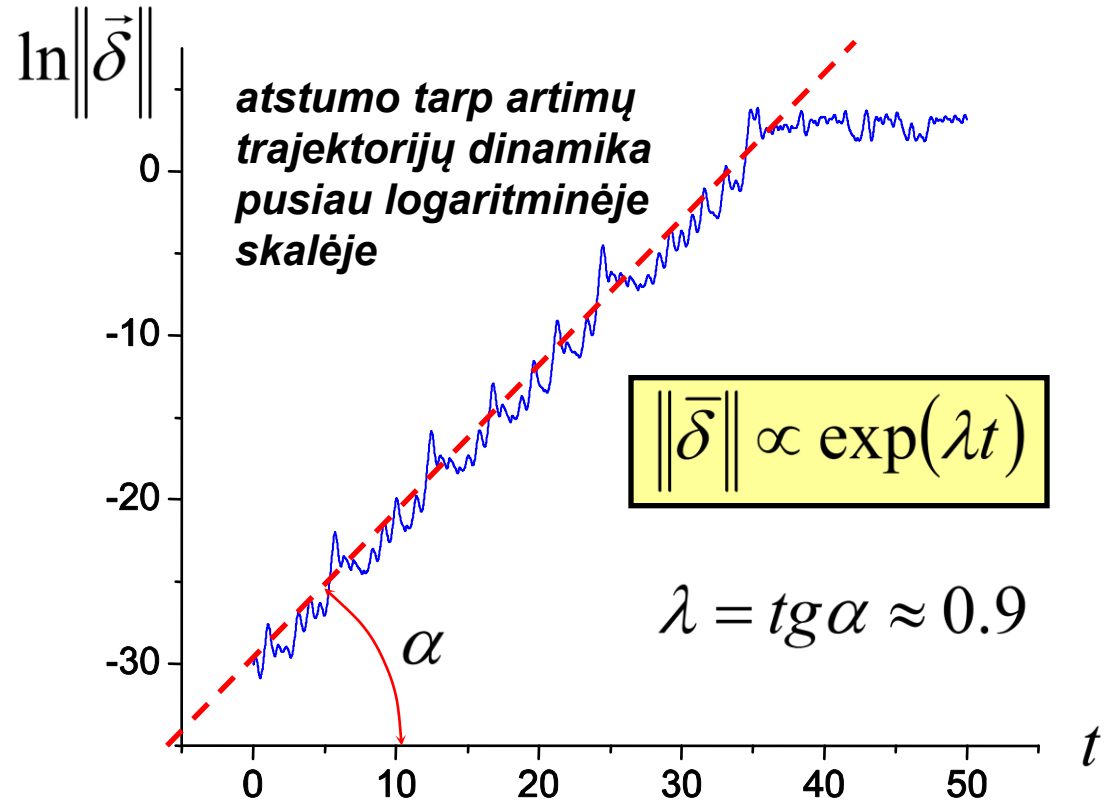
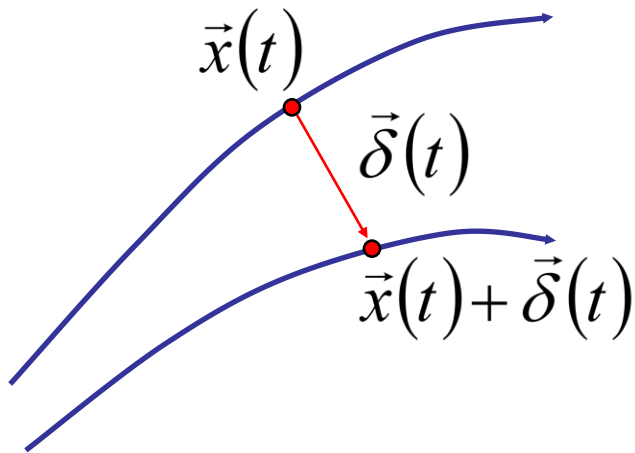
$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$



Eksponentinė artimų trajektorijų divergencija

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

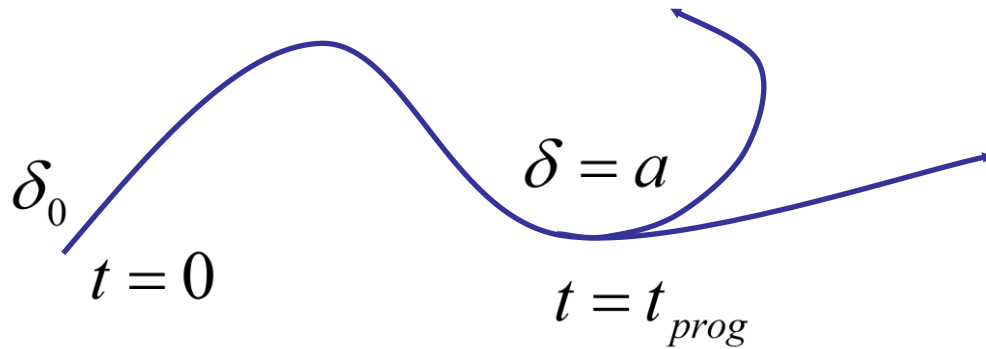
$$\vec{x} = (x, y, z)$$



λ - ***Liapunovo rodiklis***

***Jeigu Liapunovo rodiklis teigiamas, tai turime chaosą!
Chaotinėse sistemose atstumas tarp artimų trajektorijų
fazinėje erdvėje diverguoja pagal eksponentinę dėsnį.***

Prognozės trukmė



δ_0 - pradinių sąlygų matavimo tikslumas

a - leistina prognozės paklaida

$$\delta(t) = \delta_0 \exp(\lambda t)$$

$$\delta(t_{prog}) = a$$

$$\delta_0 \exp(\lambda t_{prog}) = a$$

$$t_{prog} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\delta_0}$$

Pavyzdys: Tarkime, kad $a = 10^{-1}$, $\delta_0 = 10^{-3}$. Kiek pailgės prognozės trukmė, jeigu matavimo tikslumą pagerinsime keturiom eilėm iki $\tilde{\delta}_0 = 10^{-7}$?

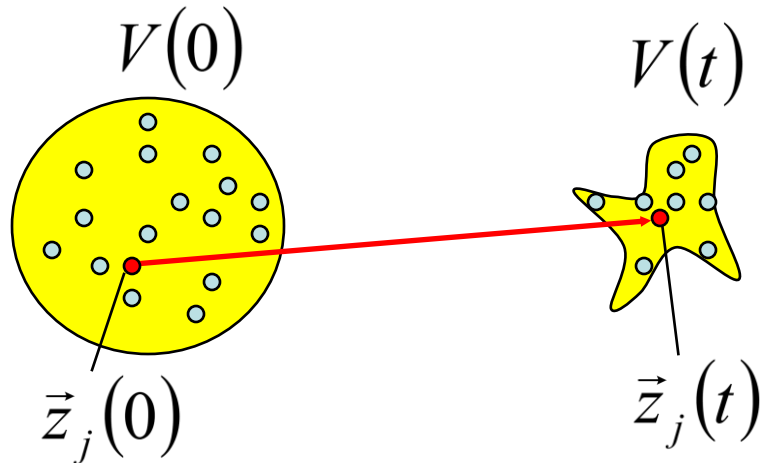
$$\frac{\tilde{t}_{prog}}{t_{prog}} = \frac{\ln a - \ln \tilde{\delta}_0}{\ln a - \ln \delta_0} = \frac{\ln 10^{-1} - \ln 10^{-7}}{\ln 10^{-1} - \ln 10^{-3}} = \frac{6}{2} = 3$$

Bet kokios pastangos gerinti matavimo tikslumą yra beprasmiškos!

Nors chaotinės sistemos yra griežtai deterministinės, jų ateitį galima prognozuoti tik statistiškai.

Fazinio tūrio evoliucija

- Viena svarbiausių chaotinių sistemų savybių apibudinama fazinio tūrio evoliucija. Pagal tai, kaip evoliucionuoja fazinis tūris, sistemos skirstomos į **disipatyvias** ir **konservatyvias**.



- Tarkime turime dinaminę sistemą aprašomą diferencialinėmis lygtimis:

$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}(\vec{z})$$

Nagrinėsime N identiškų sistemų ansamblį. Ansamblio nariai turi skirtingas pradines sąlygas $\vec{z}_j(0)$, jos apima fazinį tūrį $V(0)$. Po laiko t faziniai taškai pakeis koordinates į $\vec{z}_j(t)$ taip, kad jie atsiders naujame tūryje $V(t)$.

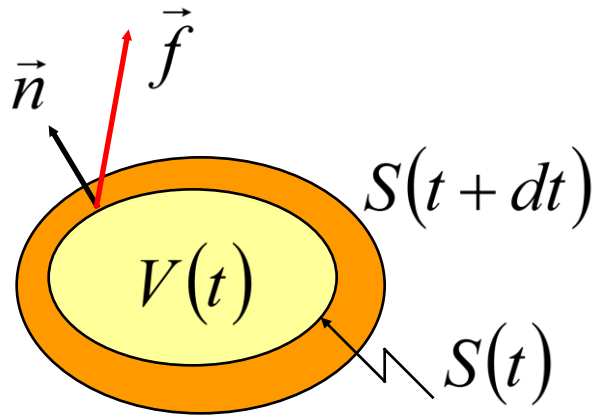
Jeigu ansamblyje yra pakankamai daug sistemų, kurios pakankamai tankiai užpildo fazinį tūrį, tai mes galime kalbėti apie fazinio tūrio evoliuciją.

- Jeigu lygtys aprašo realią fizinę sistemą, tai fazinis tūris bėgant laikui negali begalo didėti. Kai $t \rightarrow \infty$, galimi du variantai: fazinis tūris gali mažėti iki 0 arba likti pastovus.

• **Dinaminės sistemos, kurių fazinis tūris nekinta**, $V(t)=const.$, **vadinamos konservatyviomis sistemomis**.

• **Dinaminės sistemos, kurių fazinis tūris artėja prie nulio** $V(t) \rightarrow 0$, **kai** $t \rightarrow \infty$, **vadinamos disipatyviomis sistemomis**.

- Išvesime fazinio tūrio kitimo formulę. Dėl vaizdumo apsiribosime trijų diferencialinių lygčių sistemos nagrinėjimu. Ši prielaida nėra esminė – gautos čia formules yra teisingos bet kurios dimensijos sistemai.

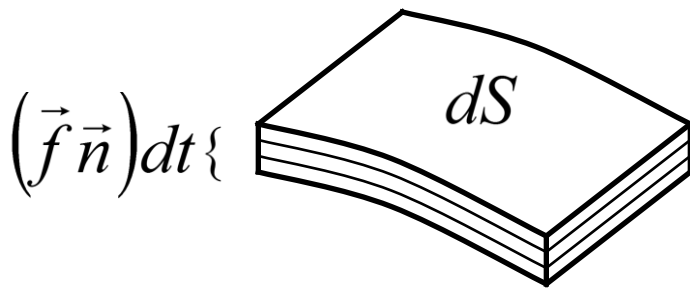


$$\dot{\vec{z}} = \vec{f}(\vec{z}) \quad (\text{Čia } \vec{z} \text{ ir } \vec{f} \text{ yra trimačiai vektoriai})$$

$V(t)$ – sistemų ansamblio tūris momentu t .

$S(t)$ – paviršius, gaubiantis tūrį $V(t)$.

- Fazinio tūrio kitimą apsprendžia fazinių taškų, gulinčių paviršiuje $S(t)$, judėjimas. Apskaičiuojame tūrio pakitimą per trumpą laiką dt .



$$V(t+dt) - V(t) = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dt dS$$

$$\frac{V(t+dt) - V(t)}{dt} = \int_S (\vec{f} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \text{div } \vec{f} dV$$

$$\dot{V} = \int_V \text{div } \vec{f} dV$$

Pavyzdys: Lorenzo sistemos fazinio tūrio evoliucija

- Pailiustruosime gautą fazinio tūrio kitimo formulę Lorenzo sistemai.

$$\begin{array}{ll} \dot{x} = s(y - x) & s > 0 \\ \dot{y} = rx - y - xz & r > 0 \\ \dot{z} = xy - bz & b > 0 \end{array} \quad \text{(Lorenzo sistemoje visi parametrai yra teigiami)}$$

$$\dot{V} = \int_V \operatorname{div} \vec{f} dV$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} [s(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy - bz]$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = -s - 1 - b < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{V} = -(s + 1 + b)V$$

$$\boxed{V(t) = V(0) \exp[-(s + 1 + b)t]} \quad \Rightarrow \quad V(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Lorenzo sistema yra disipatyvioji !

Hamiltoninių sistemų fazinio tūrio evoliucija

- Įrodysime, kad hamiltoninių sistemų fazinis tūris yra pastovus dydis, t.y., kad **Hamiltoninės sistemos yra konservatyvios.**

Hamiltoninės sistemos yra sistemos aprašomos Hamiltono lygtimis:

$$H = H(p, q, t)$$

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$$

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$$

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}$$

Alternatyvus Hamiltono Lygčių užrašymas:

$\vec{z} = (\vec{p}, \vec{q})$ - $2N$ kintamųjų vektorius

$$\dot{\vec{z}} = \{H, \vec{z}\} \equiv \vec{f}(\vec{z})$$

$$\{H, \vec{z}\}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial p_j}$$

(Puasono
skliaustai)

Prisiminkime, kad fazinio tūrio kitimas aprašomas lygtimi:

$$\dot{V} = \int_V \text{div } \vec{f} dV$$

Apskaičiuojame vektoriaus $\vec{f}$ divergenciją:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{f} &= \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \vec{f} = \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \{H, \vec{z}\} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial z_i}{\partial p_j} \right) \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} \equiv 0 \end{aligned}$$

Taigi įrodėme, kad hamiltoninės sistemos yra konservatyvios – jų fazinis tūris nekinta laike.

Chaosas hamiltoninėse sistemose (I)

- Chaosas konservatyviose ir disipatyviose sistemose pasireiškia labai skirtingai. Disipatyviose sistemose fazinis tūris mažėja iki nulio. Asimptotikoje $t \rightarrow \infty$ pradinis tūris virsta labai sudėtingu geometriniu objektu, vadinamu **keistuoju atratoriumi**. Šio objekto dimensija yra mažesnė už fazinės erdvės dimensiją (nes jo tūris lygus nuliui). Detalūs tyrimai rodo, kad tas objektas yra **fraktalas – jo dimensija yra trupmeninė**. Visos dinaminės sistemos trajektorijos ilgainiui prisitraukia prie šio sudėtingo geometrinio objekto ir elgiasi labai sudėtingai – chaotiškai.
- Konservatyviose sistemose fazinis tūris nekinta. Dėl to šiose sistemose keistųjų atraktorių nėra. Tačiau bendras konservatyvių ir disipatyvių chaotinių sistemų bruožas yra tas, kad abeiose sistemose artimos trajektorijos prasiskiria eksponentiškai greitai, t.y. abi sistemos turi teigiamus Liapunovo rodiklius ir pasižymi nepaprastu jautrumu pradinių sąlygų pakeitimams.
- Kalbant fizikine terminologija **disipatyvios sistemos yra atviros sistemos**. Jos turi išorinį energijos šaltinį ir jose vyksta energijos disipacija (pvz. dėl trinties).
- **Konservatyvios sistemos tai uždaros sistemos**. Jos neturi išorinio energijos šaltinio ir jose nėra energijos disipacijos (nėra trinties).
- Kadangi statistinė fizika nagrinėja uždaras, konservatyvias sistemas, aprašomas Hamiltono lygtimis, tai toliau mes susikoncentruosime ties hamiltoninių sistemų tyrimu.

Judėjimo integralai ir integruojamos sistemos

- Tiriant hamiltonines sistemas paprastai siekiama surasti judėjimo integralus. Tie integralai yra judėjimo tvermės dėsniai. Jie duoda tam tikrus analizinius dinaminių kintamųjų sąryšius ir iš esmės palengvina uždavinių sprendimą. Kai hamiltonianas tiesiogiai nepriklauso nuo laiko, tai pilnoji energija, pilnasis impulsas ir pilnasis judėjimo kiekio momentas yra tipiški judėjimo integralų pavyzdžiai.
- Tikslesnis matematinis judėjimo integralo apibrėžimas yra toks. Dydis $\Phi(\vec{p}, \vec{q})$ vadinamas **judėjimo integralu**, jeigu $\Phi(\vec{p}, \vec{q}) = \text{constant}(t)$. Kadangi $(\vec{p}, \vec{q})$ tenkina Hamiltono lygtis, tai funkcijos $\Phi(\vec{p}, \vec{q})$ išvestinę pagal laiką galima užrašyti taip:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{p}} \dot{\vec{p}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{q}} \dot{\vec{q}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{p}} \frac{\partial H}{\partial\vec{q}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\vec{q}} \frac{\partial H}{\partial\vec{p}} = \{H, \Phi\}$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow \{H, \Phi\} = 0}$$

Funkcija $\Phi(\vec{p}, \vec{q})$ yra judėjimo integralas, jeigu jos Puasono skliaustai lygūs nuliui.

Pavyzdžiui, jeigu hamiltonianas tiesiogiai nepriklauso nuo laiko, pilnoji energija $\Phi = H(\vec{p}, \vec{q}) = E$ yra judėjimo integralas, nes $\{H, H\} = 0$.

Chaosas hamiltoninėse sistemose (III)

- Sprendžiant hamiltoninius uždavinius siekiama surasti kuo daugiau judėjimo integralų. Jeigu sistemoje yra $2N$ kintamųjų, tai didžiausias galimas judėjimo integralų skaičius yra N .

Hamiltoninė sistema $H(\vec{p}, \vec{q})$ yra **pilnai integruojama**, jeigu egzistuoja N nepriklausomų judėjimų integralų $\Phi_j(\vec{p}, \vec{q})$: $\{H, \Phi_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, N$.

- **Bet kurią pilnai integruojamą sistemą galima suskaldyti į N nepriklausomų osciliatorių.** Tai atliekama kintamųjų pakeitimu – pereinant prie **veikimas – kampas kintamųjų**.

$$(\vec{p}, \vec{q}) \Rightarrow (\vec{I}, \vec{\Theta}) - \text{veikimas-kampas kintamieji} - H(\vec{p}, \vec{q}) \Rightarrow H(\vec{I}, \vec{\Theta}) \equiv H(\vec{I})$$

$$\dot{\vec{I}} = 0, \dot{\vec{\Theta}} = \partial H / \partial \vec{I} \Rightarrow I_j = \text{const}_j, \Theta_j = \Theta_j(0) + \omega_j t, \quad j = 1, \dots, N$$

Pilnai integruojamose sistemose chaoso nėra ! Jų dinamika aprašoma N nepriklausomų osciliatorių judėjimu. $2N$ -matėje fazinėje erdvėje tai atitinka kvaziperiodinį judėjimą N - mačiu toru.

Kiek paplitusios gamtoje pilnai integruojamos sistemos ?

Galimi du priešingi atsakymai į šį klausimą:

- Visos sistemos yra integruojamos ir problema tik tame, kad mes nesame pakankamai protingi ir nesugebame nustatyti visų judėjimo integralų.

- Pilnai integruojamų sistemų iš vis nėra. Truputį sutrikdant integruojama sistemą $H_0(p, q)$,

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q)$$

visi judėjimo integralai, išskyrus energiją, iškarto žlunga, kai $\varepsilon \neq 0$.

- Abu teiginius galima paremti eksperimentiniais faktais. Tai, kad saulės sistema yra stabili (pvz. Žemės orbitos stabilumui neįtakoja sąveika su kaimyninėmis planetomis) yra svarus argumentas pirmam teiginiui. Kita vertus, statistikinės mechanikos mokslas remiasi teiginiu, kad trajektorija tolygiai užpildo energetinį paviršių, t.y., kad egzistuoja tik vienas (energijos) judėjimo integralas, ir fazinis taškas chaotiškai juda pastovios energijos paviršiumi.

Išsamiau į šį klausimą atsako **KAM teorija**, kuri nagrinėja chaoso atsiradimo scenarijus silpnai sutrikdytose integruojamose sistemose.

KAM teorijos iliustracijos

KAM = Kalmogorov (1954) + Arnold (1963) + Moser (1973)

$$m\ddot{x} = -\partial V(x)/\partial x + \varepsilon \sin \omega t$$

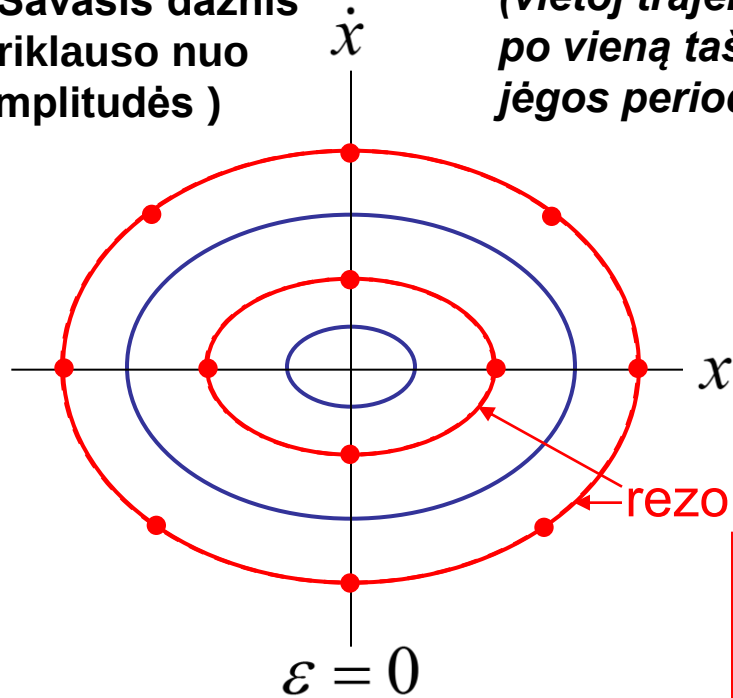
-netiesinis osciliatoriaus + periodine jėga
(integruojama sistema) (neintegr. trikd.)

$$\Omega = \Omega(A)$$

(Savasis dažnis
priklauso nuo
amplitudės)

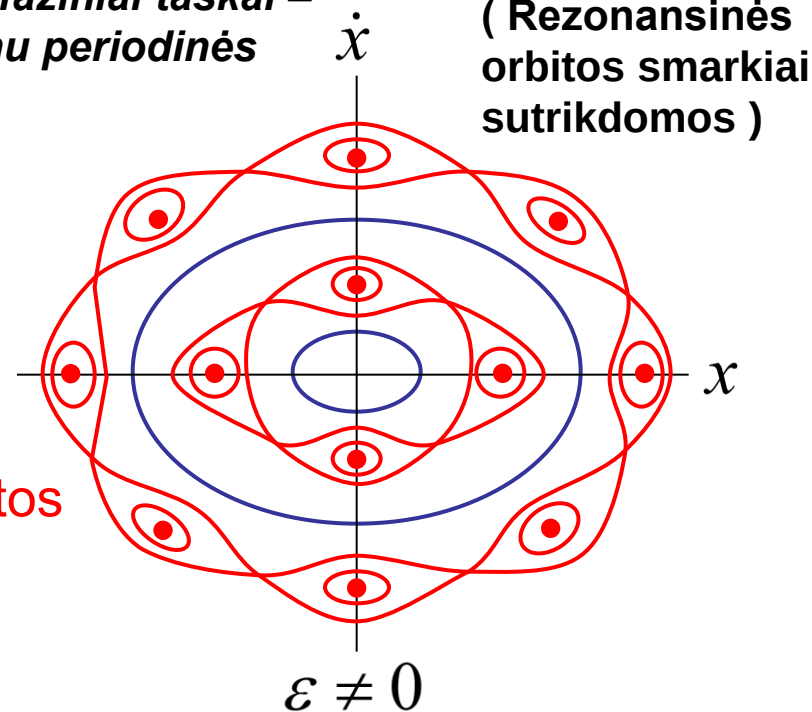
Stroboskopinis fazinis portretas

(vietoj trajektorijų piešiami faziniai taškai –
po vieną tašką ties kiekvienu periodinės
jėgos periodu)



rezonansinės orbitos

$$\frac{\omega}{\Omega(A)} = \frac{m}{n}$$

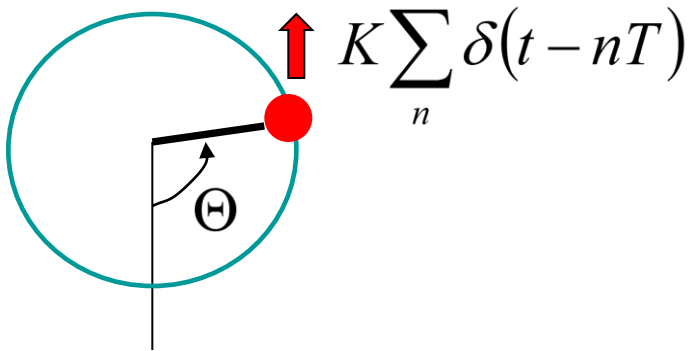


(Rezonansinės
orbitos smarkiai
sutrikdomos)

Chaosas atsiranda, kai persikloja skirtingų eilių rezonansai (Čirikovo kriterijus)

Periodiškai smūgiuojamas rotorius

- KAM teorijos rezultatus pailiustruosime labai paprastu fiziniu modeliu – periodiškai smūgiuojamu rotoriumi. Šis modelis ypatingai populiarius ir svarbus kvantinio chaoso teorijoje. Jis kokybiškai paaiškina kvaziklasikinių atomų (su dideliais kvantiniais skaičiais) jonizacijos žemo dažnio elektriniu lauku eksperimentus.



Dalelė masės $m=1$ be trinties sukasi vienetinio radiuso apskritimu. Kas periodą $T=1$ ji patiria smūgį vertikaliai į viršų nukreipta jėga K . Smūgiai yra trumpalaikiai taip, kad juos galima aprašyti Dirako δ funkcija. Tarp smūgių dalelę neveikia jokios jėgos – ji pastoviu greičiu sukasi apskritimu (**animacija**).

- Pagrindiniai šio uždavinio klausymai yra tokie:
- Kaip kinta sistemos dinamika didinant K (kaip sistemoje atsiranda chaosas)?
- Koks yra asimptotinis vidutinės energijos elgesys, esant fiksuotai K vertei? Ar dalelės energija didėja ar sotinasi, kai $t \rightarrow \infty$?

- Užrašysime šiai sistemai judėjimo lygtis. Pažymėsime I dalelės judėjimo kiekio momentą (čia jis lygus rotoriaus sukimosi dažniui $\omega=I$). Tuomet hamiltonianas ir Hamiltono lygtys yra tokie:

neintegruojamas trikdys

$$H(I, \theta, t) = I^2 / 2 + K \cos \Theta \sum_n \delta(t - nT)$$

$$\frac{dI}{dt} = K \sin \Theta \sum_n \delta(t - nT), \quad \frac{d\Theta}{dt} = I$$

Hamiltono lygtys

- Kai $K=0$, sistema yra pilnai integruojama. Jai galioje judėjimo kiekio tvermės dėsnis. Kai $K \neq 0$, sistemoje nebelieka judėjimo integralo ir galima manyti, kad pakankamai dideliems K joje gali atsirasti chaotinis elgesys.
- Tarp smūgių, kai $t=[nT, (n+1)T]$, Hamiltono lygtis galima nesunkiai išspręsti. Tuomet galima gauti sąryšį $(\Theta_n, I_n) \rightarrow (\Theta_{n+1}, I_{n+1})$. Čia (Θ_n, I_n) yra kampo ir judėjimo kiekio momento vertės, kurias sistema įgyja iš karto po n -to smūgio. Toks kintamųjų sąryšis vadinamas **Puankarė atvaizdu**, arba paprastai **atvaizdu**. Jeigu (Θ_n, I_n) taškus pavaizduosime (Θ, I) plokštumoje, tai gausime **stroboskopinį fazinį portretą**. Jis rodo dinaminių kintamųjų vertes vieną kartą per išorinės jėgos periodą.

Chaosas hamiltoninėse sistemose (VIII)

- Tarkime, kad (Θ_n, I_n) yra dinaminių kintamųjų vertės iš karto po n -to smūgio. Tuomet iki pat $n+1$ - mo smūgio sistemos evoliucija aprašoma lygtimis ($T=1$):

$$\frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dt} = I \quad \longrightarrow \quad I = I_n, \quad \Theta = \Theta_n + I_n t \quad [n < t < n+1]$$

Kad surastume I_{n+1} vertę, iš karto po $n+1$ - mo smūgio reikia apskaičiuoti priedą ΔI prie judėjimo kiekio momento, kurį sistema įgyja $n+1$ - mo smūgio metu. Dėl to judėjimo kiekio momento lygtį turime suintegruoti mažame laiko intervale tarp $n+1-\varepsilon < t < n+1+\varepsilon$, čia $\varepsilon \rightarrow 0$ mažas dydis.

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{n+1-\varepsilon}^{n+1+\varepsilon} dt \frac{dI}{dt} = I(n+1+\varepsilon) - I(n+1-\varepsilon) \\ &= \int_{n+1-\varepsilon}^{n+1+\varepsilon} dt K \sin \Theta \sum_m \delta(t-m) = K \sin \Theta_{n+1} \end{aligned}$$

Tuomet gauname:

$$\begin{aligned} \Theta_{n+1} &= (\Theta_n + I_n) \bmod 2\pi \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin \theta_{n+1} \end{aligned}$$

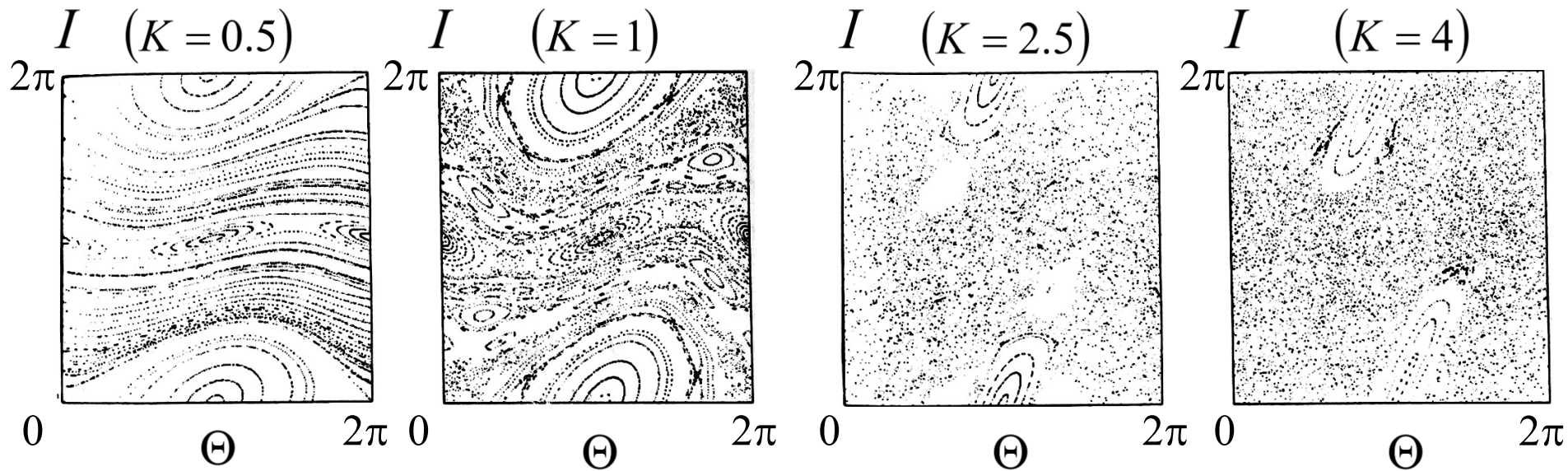
**Standartinis (arba Čirikovo
ir Zaslavskio) atvaizdas**

Čia $x \bmod y$ reiškia trupmeninę dalybos x/y dalį.

Chaosas hamiltoninėse sistemose (IX)

- Čirikovo ir Zaslavskio atvaizdas yra kruopščiai ištirtas mokslinėje literatūroje. Čia pateiksime keletą skaitmeninių rezultatų (**animacija**).

$$\begin{aligned}\Theta_{n+1} &= (\Theta_n + I_n) \bmod 2\pi \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin \Theta_{n+1}\end{aligned}$$



- Mažiams K yra daug nerezonansinių trajektorijų (nejautrių trikdžiams), judančių nuo $\Theta = 0$ iki $\Theta = 2\pi$. Taip pat yra ir rezonansinės trajektorijos (jautrios trikdžiams). Ypatingai pastebimos periodo vienas (kai trajektorijos periodas sutampa su smūgių periodu) $(\Theta, I) = (\pi, 0)$ ir periodo du (kai trajektorijos periodas dvigubai didesnis už smūgiavimo periodą) $(0, \pi) \Leftrightarrow (\pi, \pi)$ rezonansai.
- Didėjant K rezonansinės trajektorijos „išstumia“ nerezonansines. Skirtingų eilių rezonansai persikloja ir virsta vieninga chaotinė trajektorija, užpildančia visą fazinę plokštumą.

Chaosas hamiltoninėse sistemose (X)

- Taigi dideliems K stroboskopiniai taškai tolygiai padengia fazinę plokštumą. Judėjimas tampa atsitiktinis ir mes galime taikyti statistikos metodus. Parodysime, kad dideliems K **periodiškai smūgiuojamo rotoriaus sistemą galima adekvačiai aprašyti Lanževeno arba Fokerio-Planko lygtimi.**

$$\begin{aligned}\Theta_{n+1} &= (\Theta_n + I_n) \bmod 2\pi \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin \Theta_{n+1}\end{aligned}$$

Chaosso režime θ_n kinta atsitiktinai, todėl Čirikovo ir Zaslavskio atvaizde $\sin \theta_{n+1}$ galima pakeisti atsitiktiniu dydžiu: $\sin \theta_{n+1} = \xi_n$

Kadangi θ_n vertės yra tolygiai pasiskirsčiusios intervale $[0, 2\pi]$, tai atsitiktinio dydžio ξ_n vidurkis ir koreliatorius yra tokie:

$$\langle \xi_n \rangle = \langle \sin \Theta_{n+1} \rangle = 0$$

$$\langle \xi_n \xi_{n+1} \rangle = q \delta_{n,n+1}$$

$$q = \langle \xi_n^2 \rangle = \langle \sin^2 \Theta_{n+1} \rangle = \frac{1}{2}$$

- Pakeitus $\sin \theta_{n+1}$ atsitiktine jėga, antroji Čirikovo ir Zaslavskio atvaizdo lygtis tampa nepriklausoma nuo pirmos. Toks lygties „atskėlimas“ yra įmanomas dėl to, kad atvaizdo θ_n kintamasis kinta žymiai greičiau negu I_n . Rezultate antrą lygtį užrašome taip:

$$I_{n+1} - I_n = K \xi_n \longrightarrow \frac{dI}{dt} = K \xi(t)$$

Kai $I_n \gg 1$, judėjimo kiekio momentas kiekvieno smūgio metu santykinai pasikeičia nedaug. Todėl skirtumą $I_{n+1} - I_n$ pakeitėme išvestine ir $n=t$ laikome tolydžiuoju kintamuoju.

Chaosas hamiltoninėse sistemose (XI)

- Taigi periodiškai smūgiuojamo rotoriaus uždavinį suvedėme į Lanževeno lygtį:

$$\frac{dI}{dt} = K\xi(t)$$

$$\langle \xi(t) \rangle_{\xi} = 0$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle_{\xi} = \frac{1}{2}\delta(t-t')$$

Šis Lanževeno uždavinys tiksliai sutampa su Brauno dalelės Lanževeno uždaviniu didelės trinties riboje. Jį atitinkanti Fokerio-Planko (arba Einšteino-Smoluchovskio) lygtis yra difuzijos lygtis:

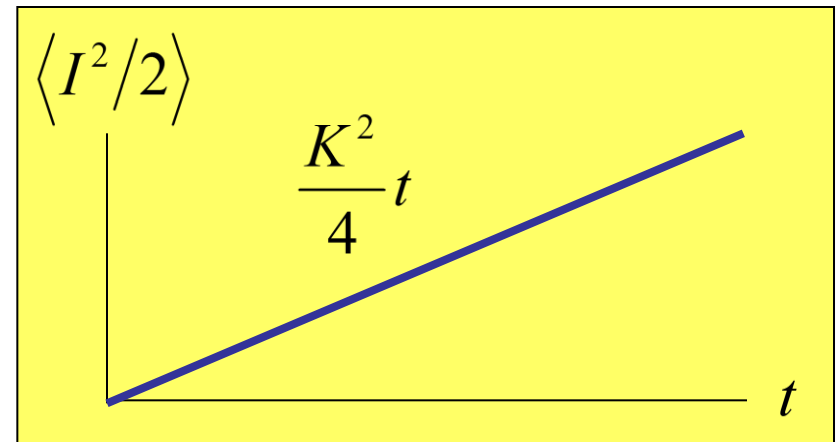
$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial I^2}$$

$$D = \frac{K^2}{4}$$

Čia $P(I, t)$ yra tikimybė, kad momentu t dalelės judėjimo kiekio momentas bus I .

$$\rightarrow P(I, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{I^2}{4Dt}\right)$$

$$\rightarrow \langle I^2/2 \rangle = Dt = \frac{K^2}{4}t$$



Judėjimo kiekio momentas difunduoja !
Vidutinė rotoriaus energija didėja proporcingai t .

- Judėjimo kiekio momento difuzija stebima kvaziklasikinių atomų jonizacijos eksperimentuose.

Byfield, Koch eksperimentai (1974):

Vandenilio atomai būsenoje su pagrindiniu kvantiniu skaičiumi $n_0=63 - 69$ buvo žadinami mikrobangomis $\nu=9.9 \text{ GHz}$ ir buvo matuojamas jonizacijos greitis.

$$\hbar \nu \ll E_{66}^{jon}, \quad \hbar \nu \ll |E_{67} - E_{66}|$$

Nežiūrint į mažą fotono energiją efektyvi jonizacija buvo stebima, kai elektrinio lauko stipris viršijo 20 V/cm . Ši lauko vertė žymiai mažesnė už kritinę lauko vertę jonizuojant pastoviuoju elektriniu lauku.

- Jensen (1982, 1984); Delone, Krainov, Shepelyansky (1983) teorija:

Eksperimentai buvo gerai paaiškinti taikant atomui ne kvantines, o klasikines judėjimo lygtis. **Jonizacijos efektai yra sąlygoti judėjimo kiekio momento difuzija**, panašiai kaip periodiškai smūgiuojamo rotoriaus atveju.

Paprasti matematiniai chaoso modeliai (I)

- Tiriant konkrečias fizines sistemas dažniausiai gaunami gana sudėtingi matematiniai modeliai. Aišku būna ir išimčių. Pavyzdžiui, periodiškai smūgiuojamo rotoriaus atveju mes gavome paprastą matematinį modelį – Čirikovo ir Zaslavskio atvaizdą. Mes matėme, kad netgi toks paprastas matematinis modelis demonstruoja labai sudėtingą elgesį.
- Smūgiuojamo rotoriaus uždavinyje mes startavome nuo Hamiltono diferencialinių lygčių. Mums pavyko transformuoti jas į atvaizdo lygtis, t.y. į lygtis su diskretiniu laiku. Tai padarėme suintegravę diferencialines lygtis per išorinės jėgos periodą ir surišę dinaminių kintamųjų vertes $n+1$ -mo periodo pradžioje su atitinkamomis vertėmis n -to periodo pradžioje. Tokia procedūra yra gana universali. Daugelyje atvejų diferencialines lygtis galima transformuoti į diskretinius atvaizdus.
- Diskretiniai atvaizdai yra žymiai paprastesni už diferencialines lygtis. Todėl norint suprasti, kaip dinaminėse sistemose atsiranda chaosas patogiau yra pasirinkti nagrinėjimo objektu diskretinius atvaizdus.
- Šiame nagrinėjime mes nesirišime prie konkrečių fizinių modelių. Mes apsiribosime abstrakčiais matematiniais modeliais. Svarbu, kad jie atitinka deterministinę dinaminę sistemą, t.y. užduoda taisyklę, pagal kurią iš pradinių dinaminių kintamųjų verčių galima apskaičiuoti jų vertes bet kuriam laiko momentui į ateitį. Modeliuojant atvaizdais konservatyvias fizines sistemas mes reikalausime, kad jų fazinis tūris evoliucijos metu nekistų.

Pirmos eilės atvaizdai

- Paprasčiausios dinaminės sistemos gali būti modeliuojamos pirmos eilės atvaizdais.

$$x_{m+1} = f(x_m)$$

x – dinaminis kintamasis

m – diskretinis laikas

f – atvaizdo funkcija

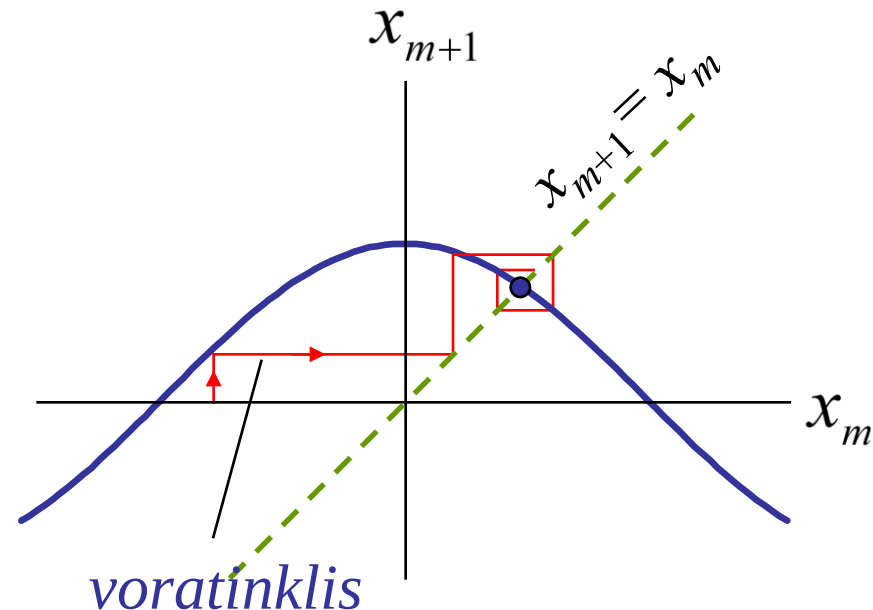
- Atvaizdo dinamiką galima geometriškai pavaizduoti nupiešus funkcijos f grafike vadinamąjį „voratinklį“. Čia pailiustruota atvaizdo iteracijos procedūra, kai atvaizdo funkcija yra kosinusas.

$$x_{m+1} = \cos x_m$$

- Ši sistema artėja prie stabilaus rimties taško x_{st} , kuris atitinka stacionarų atvaizdo sprendinį:

$$x_{st} = \cos x_{st}$$

- Šioje sistemoje chaoso nėra. Toliau pateiksime pirmos eilės atvaizdą su chaotiniu elgesiu.



Pjūklo danties atvaizdas

- Pjūklo danties atvaizdas turbūt yra pati paprasčiausia chaotinė dinaminė sistema.

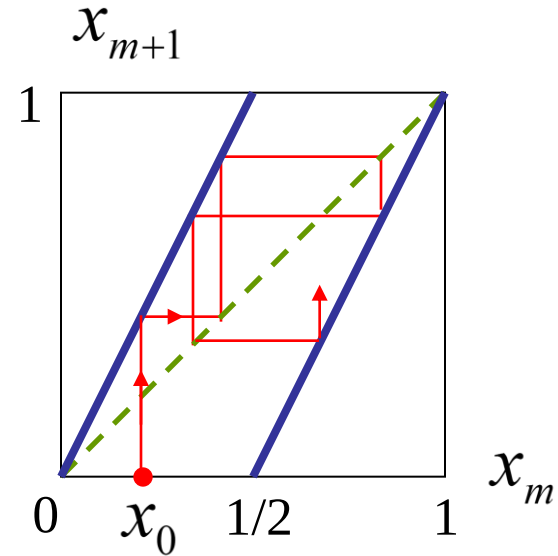
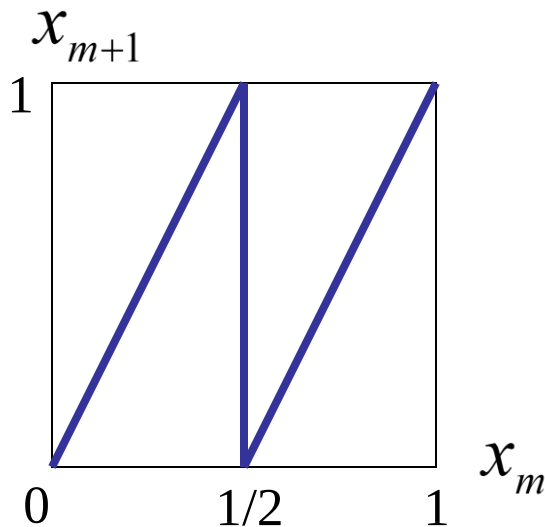
$$x_{m+1} = \{2x_m\}$$

$\{\dots\}$ - trupmeninė skaičiaus dalis

Pavyzdžiui: $\{3.2456\} = 0.2456$

Alternatyvus žymėjimas:

$$x_{m+1} = 2x_m \bmod 1$$



Šiam atvaizdui galima griežtai įrodyti chaotinio elgesio egzistavimą. Šis pavyzdys yra puiki iliustracija to, kaip sudėtingas elgesys gali atsirasti paprastoje dinaminėje sistemoje.

Paprasti matematiniai chaos modeliai (IV)

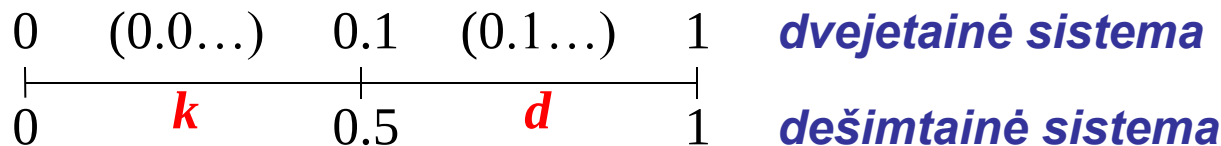
- Sistemos dinamikai suprasti patogiu naudoti dvejetainę skaičių sistemą. Dvejetainėje sistemoje skaičiaus dauginimas iš 2 atitinka kablelio postūmį per vieną poziciją į dešinę (Bernulio postūmį). Pavyzdžiui:

$$x_m = 0.11001... = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \dots$$

$$2 \cdot x_m = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + \dots = 1.1001...$$

Trupmeninė dalis: $\{1.1001...\} = 0.1001...$, tad $\{2 \cdot x_m\} = 0.1001...$

Taigi **šio atvaizdo operacija atitinka dvejetainio skaičiaus kablelio postūmį per vieną poziciją į dešinę ir sveikosios dalies nubraukimą.**



Jeigu pradinė sąlyga yra **racionalusis skaičius**, tai egzistuoja **baigtinis periodas**:

periodas

$$x_0 = 0.\overbrace{101001} \overbrace{1101001} \overbrace{1101001} \dots$$

dkdkkd dkdkkd dkdkkd...

d – dešinioji intervalo pusė

k – kairioji intervalo pusė

Iteracijos metu fazinio taško šokinėjimas iš kairės į dešinę intervalo pusę periodiškai kartosis! Tai atitinka periodinę sistemos trajektoriją.

Jeigu pradinė sąlyga yra **iracionalusis skaičius**, tai jokio **periodo nėra**:

$$x_0 = 0.\overbrace{101001101110}^{\text{periodo nėra}}\dots$$

Taigi pradinės sąlygos, išreiškiamos racionaliaisiais skaičiais, atitinka periodines sistemos trajektorijas, o iracionaliaisiais – neperiodines.

Skaičių teorijoje įrodoma, kad $[0, 1]$ intervale iracionaliųjų skaičių yra daugiau, negu racionaliųjų. Racionalieji skaičiai sudaro skaitę aibę (kiekvienam galima priskirti natūralųjį skaičių), o iracionalieji – neskaitę.

Tad atsitiktinai pasirinkdami pradinę sąlygą $[0, 1]$ intervale mes dažniausiai užtaikysime ant iracionalaus skaičiaus ir turėsime neperiodinį elgesį.

Kaip įrodyti, kad sistema gali elgtis chaotiškai, pagal atsitiktinių skaičių dėsnį?

Pradinėje sąlygoje yra užkoduota visa tolimesnė sistemos evoliucija.

Pasirinkime pradinę sąlygą pagal tokį algoritmą: mėtykime monetą ir rašykime 1, kai iškrenta pinigais (p) ir 0, kai herbas (h).

$$x_0 = 0.\overbrace{101001101110}^{\text{phphpphppph...}}\dots$$

dkdkkdkddk...

Startuojant iš tokios pradinės sąlygos turėsime lygiai tokį patį fazinio taško šokinėjimą tarp kairės (k) ir dešinės (d) $[0,1]$ intervalo pusių, kaip kaitaliojasi pinigų ir herbo pusės mėtant monetą.

Turime chaosą deterministinėje sistemoje!

Jautrumas pradinėms sąlygoms

- Pasinaudodami šiuo modeliu galime geriau suprasti chaotinių sistemų jautrumą pradinėms sąlygoms.

Pasirinkime dvi artimas pradines sąlygas, kurios išreiškiamos dviem skaičiais iki septinto ženklo po kablelio sutampančiais skaitmenimis:

$$x_0 = 0.1010011|01110011000111...$$

$$x'_0 = 0.1010011|10010000111100...$$

Tuomet aišku, kad esant šioms pradinėms sąlygoms, septynias iteracijas šios dvi sistemos trajektorijos liks artimos. Jos kartu bus kairėje arba dešinėje $[0,1]$ intervalo pusėje. Po to jų judėjimas taps visiškai nekoreliuotas.

Atvaizdų Liapunovo rodikliai

$$x_{m+1} = f(x_m)$$

$x_0, x_0 + \delta_0$ - dvi artimos prad. sąlygos

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{n\lambda}, \quad \lambda - \text{Liapunovo rodiklis}$$

$$\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$$

$$f^n(x) \equiv \underbrace{f(f(f(\cdots f(x)\cdots)))}_n$$

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| \\ &= \frac{1}{n} \ln \left| (f^n)'(x_0) \right| \end{aligned}$$

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \quad - \text{grandinės taisyklė}$$

Pavyzdys:

$$\begin{aligned} (f^2)'(x_0) &= (f(f(x_0)))' \\ &= f'(f(x_0))f'(x_0) = f'(x_1)f'(x_0) \end{aligned}$$

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}$$

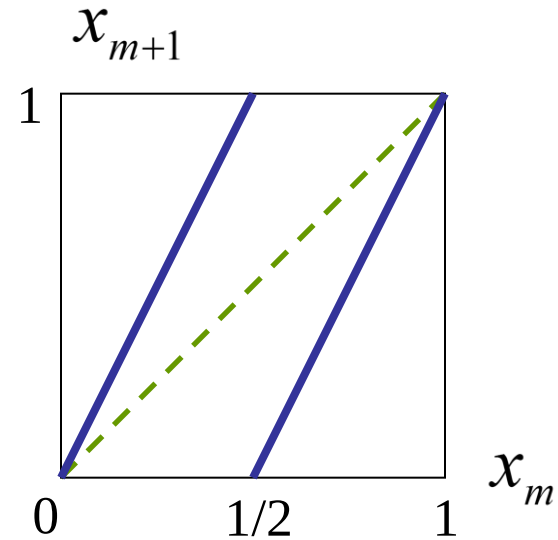
$\lambda > 0$ - reiškia chaosą

$\lambda < 0$ - atitinka stabilų rimties tašką, arba periodinę ciklą

- Pademonstruosime Liapunovo rodiklį skaičiavimo metodiką konkrečiu pavyzdžiu. Apskaičiuosime ***pjūklo danties atvaizdo Liapunovo rodiklį.***

$$x_{m+1} = \{2x_m\}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}$$



$$f'(x_i) = 2, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = n \ln 2$$

$$\lambda = \ln 2$$

$\lambda > 0$ - tai patvirtina chaoso egzistavimą pjūklo danties atvaizde!

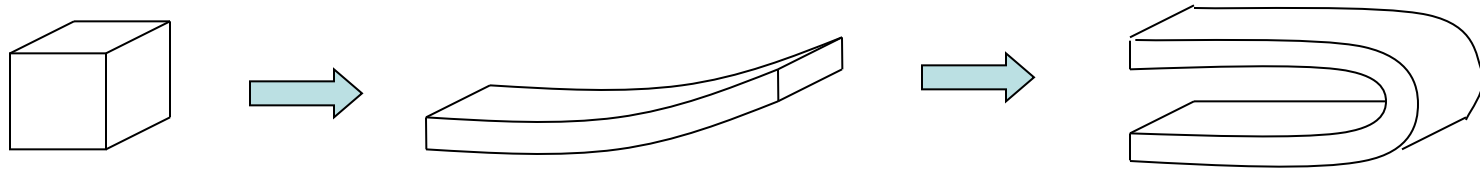
Antros eilės atvaizdai

- Nors pirmos eilės atvaizdai ir paaiškina chaoso atsiradimo priežastis, tačiau jie turi vieną trūkumą – visi pirmos eilės chaotiniai atvaizdai yra ***negrįžtami laike (non-invertable)***. Tai reiškia, kad iš pradinių sąlygų neįmanoma vienareikšmiai apskaičiuoti sistemos būsenas į praeitį, nors į ateitį sistemos būsenos nustatomos vienareikšmiai.
- Realių fizinių sistemų modeliai turi būti ***grįžtami laike (invertable)***, t.y. iš pradinių sąlygų turėtų būti galima vienareikšmiai apskaičiuoti ne tik ateitį, bet ir praeitį. Paprasčiausius grįžtamus laike chaotinius modelius galima sukonstruoti pasitelkus antros eilės atvaizdus. Toliau panagrinėsime du konservatyvius antros eilės atvaizdus, t.y. atvaizdus kurių fazinis tūris (tiksliau plotas) nekinta. Priminsiu, kad būtent tokio tipo yra Čirikovo ir Zaslavskio atvaizdas, kuris modeliuoja periodiškai smūgiuojamo rotoriaus uždavinį.

Antros eilės atvaizdai suteikia gerą geometrinį fazinės erdvės transformacijos vaizdą. Iš jų analizės galima geriau suprasti:

- ***kas sąlygoja nepaprastą jautrumą pradinėms sąlygoms?***
- ***kaip gali artimos trajektorijos eksponentiškai tolti viena nuo kitos ir pasilikti ribotoje fazinės erdvės dalyje?***

Pagrindinis chaotinio elgesio susidarymo mechanizmas yra sąlygotas pakartotiniu fazinio tūrio TAMPYMU ir LANKSTYMU.



Dinaminėje sistemoje chaotinis elgesys atsiranda tuomet, kai fazinis tūris yra ištempiamas viena kryptimi ir sulenkiamas kita kryptimi (**animacija Lorenzo sistamai**).

- Tipišką chaotinės sistemos fazinio tūrio evoliuciją galima pailiustruoti tešlos pyragaičiui paruošimo procedūra

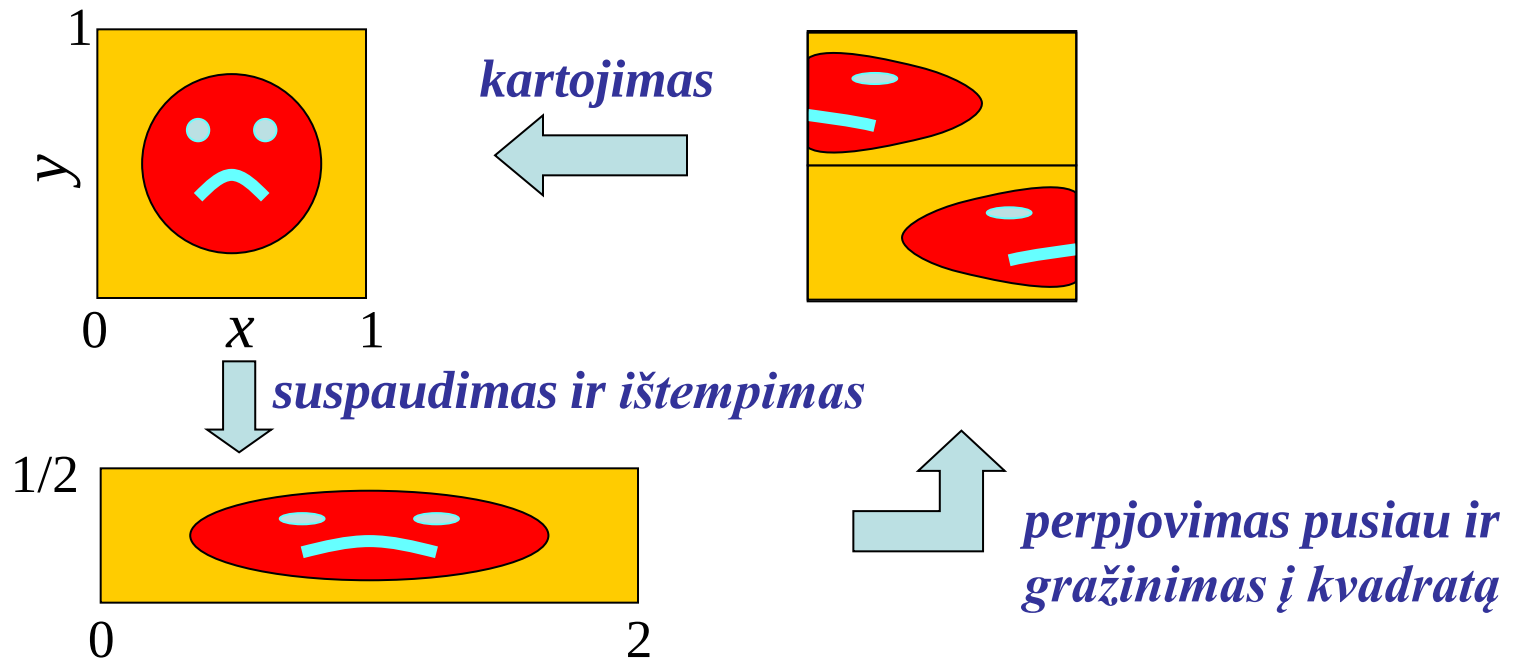


Kartojat šias operacijas gausime vieną į kitą įdėtų pasagų aibę. Šiame procese akivaizdžiai matome jautrumą pradinėms sąlygoms. Tarkime, kad mes pradžioje nuspalviname mažą tešlos dalį maisto dažais. Tai atitinka artimų pradinųjų sąlygų pasirinkimą. Tuomet po daugelio iteracijų tie dažai tolygiai išsimaišys po visą tešlą.

Kepėjo atvaizdas (baker's map)

- Operacijas, panašias į tas, kurios buvo atliekamos su tešla, galima užrašyti paprastu matematiniu modeliu – antrosios eilės atvaizdu (vadinamu kepėjo atvaizdu):

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = B(x_n, y_n) \equiv \begin{cases} (2x_n, y_n / 2), & \text{kai } 0 \leq x_n < 1/2 \\ (2x_n - 1, (y_n + 1)/2), & \text{kai } 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$



Kadangi fazinis plotas du kartus ištempimas x kryptimi ir du kartus suspaudžiamas y kryptimi, o po to perpjaunamas pusiau ir gražinamas į kvadratą, tai akivaizdu, kad po šių operacijų **fazinis plotas nepakinta**.

Paprasti matematiniai chaoso modeliai (XII)

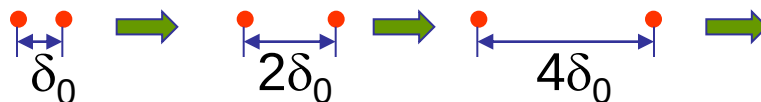
- Tai, kad kepėjo atvaizdo fazinis plotas nekinta galima įsitikinti ir formaliai matematiškai. Dėl to pakanka apskaičiuoti kintamųjų transformacijos jakobianą. Nesunku įsitikinti, kad jis lygus vienetui:

$$J = \left| \det \begin{pmatrix} \partial B_x / \partial x & \partial B_x / \partial y \\ \partial B_y / \partial x & \partial B_y / \partial y \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right| = 1$$

- Nesunku įsitikinti, kad **atvirkštinė kepėjo atvaizdo transformacija yra vienareikšmė**. Ji gaunama atliekant aprašytas operacijas atvirkštine tvarka. Formaliai matematiškai atvirkštinė transformacija užrašoma taip:

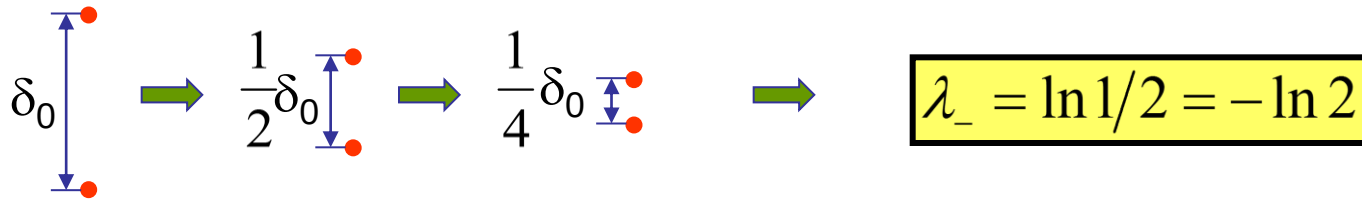
$$(x_n, y_n) = B^{-1}(x_{n+1}, y_{n+1}) \equiv \begin{cases} (x_{n+1}/2, 2y_{n+1}), & \text{kai } 0 \leq y_n < 1/2 \\ ((x_{n+1} + 1)/2, 2y_{n+1} - 1), & \text{kai } 1/2 \leq y_n \leq 1 \end{cases}$$

- Taigi kepėjo atvaizdas tenkina pagrindines realiųjų fizikinių hamiltoninių sistemų savybes – jis vienareikšmiai definuoja sistemos evoliuciją į ateitį ir praeitį ir nekeičia fazinio tūrio.**
- Šio atvaizdo chaotinis elgesys yra apspręstas fazinio ploto tempimu $\times$ kryptimi. Jeigu pasirinksime du artimus taškus $\times$ kryptimi, tai kiekvienos iteracijos metu atstumas tarp jų dvigubai didės. Tai atitinka **teigiamą Liapunovo rodiklį**:



$$\lambda_+ = \ln 2$$

- Kepėjo atvaizdo fazinis tūris nekinta dėl to, kad tempimas x kryptimi yra kompensuojamas suspaudimu y kryptimi. Jeigu pasirinksimė du artimus taškus y kryptimi, tai kiekvienos iteracijos metu atstumas tarp jų dvigubai mažės. Tai atitinka **neigiamą Liapunovo rodiklį**:



The diagram illustrates the contraction of a vertical distance δ_0 over two iterations. In the first iteration, the distance δ_0 (represented by a blue double-headed arrow between two red dots) is reduced to $\frac{1}{2}\delta_0$. In the second iteration, this distance is further reduced to $\frac{1}{4}\delta_0$. The final result is shown in a yellow box: $\lambda_- = \ln 1/2 = -\ln 2$.

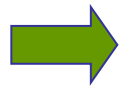
Teigiamo ir neigiamo Liapunovo rodiklių suma lygi nuliui: $\lambda_+ + \lambda_- = 0$ – tai atspindi tą faktą, kad sistemos fazinis tūris nekinta.

- Taigi kepejo atvaizdas atitinka chaotinę hamiltoninę sistemą su vienareikšme grįžtama dinamika. Mes pritaikysime šiam atvaizdui BBKGY grandinėlės metodą ir išvesime Boltzmano kinetinės lygties analogą, kuriai galioja H-teorema, t.y. kuri aprašo negrįžtąją dinamiką. Šiame išvedime nenaudosime jokių tikimybės teorijos prielaidų. Mes remsimės tik sistemos dinamikos dėsniais ir gausime griežtai tikslią Boltzmano kinetinę lygtį. Šis modelis yra šauni iliustracija to, kaip griežtai deterministinėje sistemoje su grįžtama mikroskopine dinamika atsiranda makroskopinis negrįžtamumas.

Modelinė Boltzmano kinetinė lygtis

- Užrašysime kepėjo atvaizdai Liouvilio lygtį. Tarkime, kad turime daug vienodų sistemų (Gibso ansamblį), aprašomų kepėjo atvaizdu. Tų sistemų pradinės sąlygos yra skirtingos. Pažymėkime ansamblio tankio funkciją po n -tos iteracijos $\rho_n(x, y)$. Kiekvienas ansamblio narys evoliucionuoja pagal kepėjo atvaizdo lygtis ir tankio funkcijai turi galioti tolydumo lygtis, kuri ir yra Liouvilio lygtis:

$$\rho_n(x, y) = \int_0^1 dy' \int_0^1 dx' \delta(x - B_x(x', y')) \delta(y - B_y(x', y')) \rho_{n-1}(x', y') = \rho_{n-1}(B^{-1}(x, y))$$



$$\rho_n(x, y) = \begin{cases} \rho_{n-1}(x/2, 2y), & \text{kai } 0 \leq y < 1/2 \\ \rho_{n-1}((x+1)/2, 2y-1), & \text{kai } 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Ši Liouvilio lygtis yra analogiška Liouvilio lygčiai, kurią rašėme N sąveikaujančių dalelių sistemai. Tik dabar vietoje $6N$ - matės koordinačių ir impulsų erdvės turime dvimatę kintamųjų (x, y) erdvę. Aišku ši lygtis neturi nieko bendro su realiu daugiadalelių fiziniu uždaviniu. Čia kalbame tik apie formalią matematinę analogiją.

- Boltzmano lygtis yra viendalelės tankio funkcijos lygtis. Viendalelė tankio funkcija gaunama suintegravus N -dalelę funkciją pagal visų dalelių kintamuosius, išskyrus vienos dalelės kintamuosius (žr. skyrių apie Boltzmano kinetinės lygties pagrindimą):

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \int dz_2 \cdots dz_N \rho(1, \dots, N, t)$$

Kitaip tariant, Boltzmano lygtis atitinka lygtį N -dalelės funkcijos projekcijai į vienos dalelės kintamųjų fazinę erdvę.

- Analogiškai, kepėjo atvaizdo Boltzmano lygtimi vadinsime lygtį $\rho_n(x, y)$ funkcijos projekcijai į x ašį, t.y. lygtį „viendalelei“ funkcijai:

$$f_n(x) = \int_0^1 dy \rho_n(x, y)$$

- Šiai funkcijai nesunku išvesti **tikslią** dinaminę lygtį:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^1 dy \rho_n(x, y) = \int_0^{1/2} dy \rho_{n-1}\left(\frac{x}{2}, 2y\right) + \int_{1/2}^1 dy \rho_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}, 2y-1\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dy' \rho_{n-1}\left(\frac{x}{2}, y'\right) + \frac{1}{2} \int_0^1 dy' \rho_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}, y'\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[f_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) + f_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

- Taigi funkcijos $\rho_n(x, y)$ x-projekcijai gauname tokią modelinę Boltzmano kinetinę lygtį

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \left[f_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right) + f_{n-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$$

Čia n yra diskretinis laikas. Nesunku patikrinti, kad pusiausvyrinis (stacionarus, $f_n(x) = f_{n-1}(x) = f^0(x)$) šios lygties sprendinys yra $f^0(x) = 1$.

- Dabar įrodysime šiai lygčiai Boltzmano H -teoremą. Panaudojame klasikinį H funkcijos apibrėžimą:

$$H_n = \int_0^1 dx f_n(x) \ln[f_n(x)]$$

Apskaičiuojame šios funkcijos vertę $n+1$ laiko momentu:

$$H_{n+1} = \int_0^1 dx \frac{1}{2} \left[f_n\left(\frac{x}{2}\right) + f_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \ln \left\{ \frac{1}{2} \left[f_n\left(\frac{x}{2}\right) + f_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \right\}$$

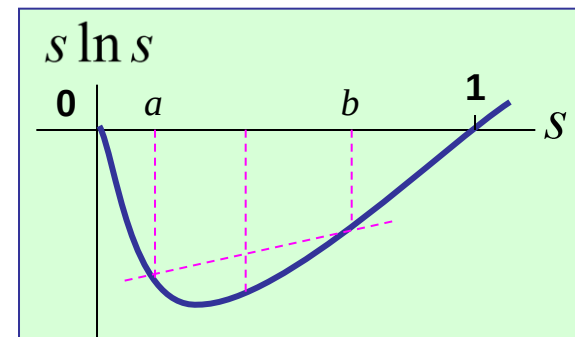
Funkcija po integralu yra pavidalo

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right), F(s) = s \ln s$$

Čia: $a = f_n(x/2)$, $b = f_n((x+1)/2)$, $s = (a+b)/2$

Iš šios funkcijos grafiko išplaukia, kad

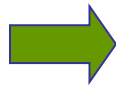
$$[F(a) + F(b)]/2 \geq F\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



- Pastaroji nelygybė geometriškai reiškia tai, kad tiesi linija jungianti du funkcijos $F(s)$ taškus yra virš šios funkcijos. Iš šios nelygybės išplaukia H -teorema:

$$H_{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left\{ f_n\left(\frac{x}{2}\right) \ln \left[f_n\left(\frac{x}{2}\right) \right] + f_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \ln \left[f_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \right\}$$

$$= \int_0^{1/2} dx' f_n(x') \ln[f_n(x')] + \int_{1/2}^1 dx' f_n(x') \ln[f_n(x')] = H_n$$



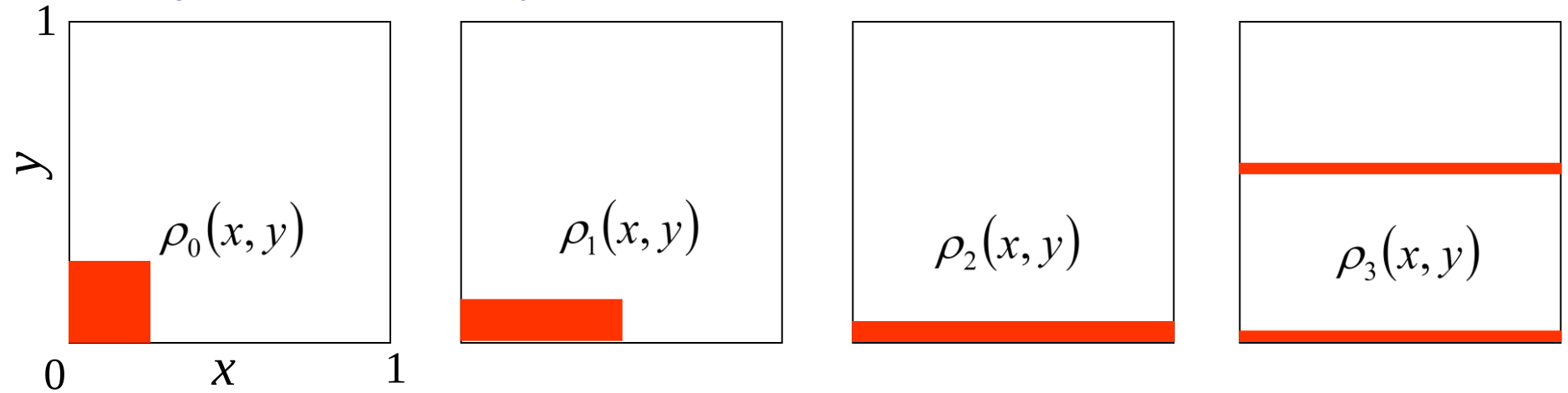
$$H_{n+1} \leq H_n$$

Taigi griežtai įrodėme, kad grįžtamos laike chaotinės sistemos Liouvilio funkcijos projekcija negrįžtamai artėja prie pusiausvyrinio pasiskirstymo.

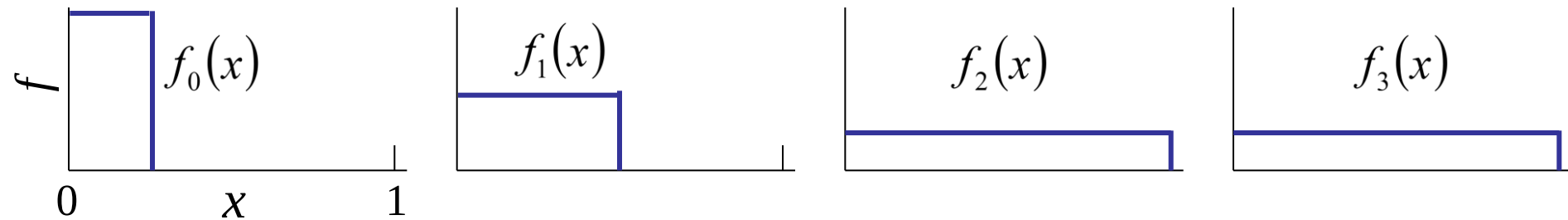
- Atkreipkime dėmesį į tai, kad Liouvilio lygtis visų dinaminių kintamųjų funkcijai $\rho_n(x, y)$ yra ekvivalenti kepėjo atvaizdui ir todėl yra grįžtama. Negrįžtamumas atsiranda, kai pereiname prie sistemos aprašymo su mažesniu kintamųjų skaičiumi, t.y., kai pereiname nuo funkcijos $\rho_n(x, y)$ prie $f_n(x) = \int dy \rho_n(x, y)$. Kitaip tariant, negrįžtamumas atsiranda dėl aprašymo užgrubinimo. Mes atsisakome nuo aprašymo su visais dinaminiais kintamaisiais – tikslią Liouvilio lygtį mes suvidurkiname pagal vieną iš kintamųjų. Šią procedūrą galima įvardinti kaip perėjimą nuo mikroskopinio prie makroskopinio aprašymo.

Paprasti matematiniai chaoso modeliai (XVIII)

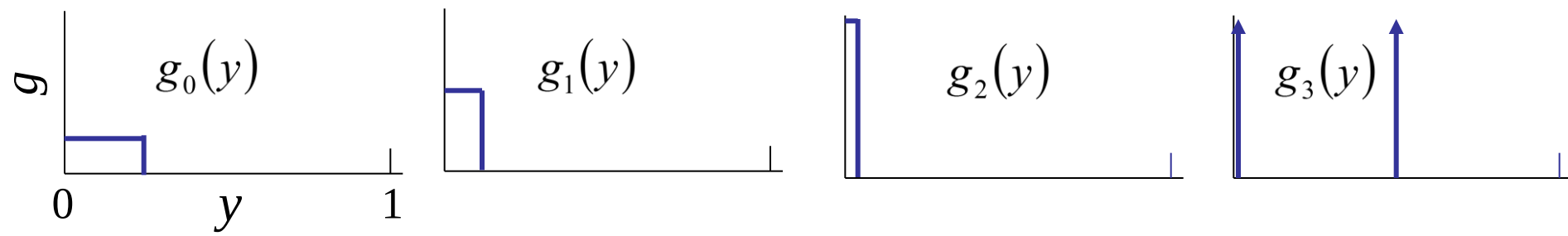
- Artėjimas prie pusiausvyros - konkretus pavyzdys:



Funkcijos $\rho_n(x, y)$ x -projekcija ($f_n(x) = \int dy \rho_n(x, y)$):



Funkcijos $\rho_n(x, y)$ y -projekcija ($g_n(y) = \int dx \rho_n(x, y)$):

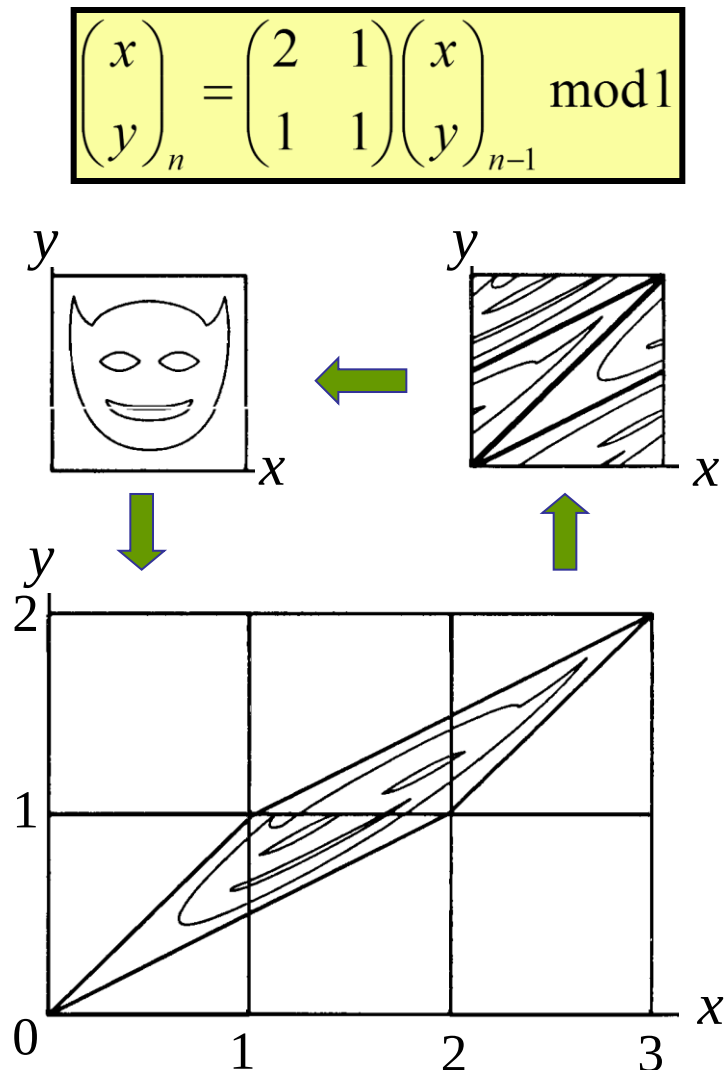


- Matome, kad x -projekcija $f_n(x)$ (fazinio tūrio tempimo kryptimi) greitai pasiekia pusiausvyrą ir toliau nekinta, tuo tarpu y -projekcija $g_n(y)$ (fazinio tūrio suspaudimo kryptimi) po daugelio iteracijų pusiausvyros nepasiekia ir lieka labai išraižyta. Tai reiškia, kad rašant kinetinę lygtį reikia teisingai pasirinkti dinامينius kintamuosius. Liouvilio lygtį reikia vidurkinti pagal stabilią kryptį (y -kintamąjį) o kinetinėje lygtyje reikia palikti priklausomybę nuo nestabiliojo kintamojo (x -kintamojo).
- Pažymėsime dar vieną labai svarbią šio modelio savybę, būdingą ir realioms fiziniams sistemoms. Mes griežtai įrodėme, kad Kepėjo atvaizdas yra negrįžtamas makroskopiniame lygyje, t.y. projekcijai $f_n(x)$. Tačiau skaitmeniškai galima įsitikinti, kad šis atvaizdas **praktiškai negrįžtamas ir mikroskopiniame lygyje**, t.y. netgi jeigu tirsime pilnos tankio funkcijos $\rho_n(x,y)$ grįžtamumą visų dinaminų kintamųjų (x,y) fazinėje erdvėje.
- Dėl to pasirenkame pradinį tašką atsitiktinai išmėtytus mažame (x,y) plokštumos kvadrato. Iteruodami juos pagal tiesioginę kepejo atvaizdo transformaciją pastebėsime, kad po kokių 10 iteracijų jie tolygiai išsisklaido po visą fazinę plokštumą. Jeigu dabar iteruosime tuos taškus atvirkštine transformacija, tai pastebėsime taškų sugrįžimą į pradinį mažą kvadratą. Tačiau jeigu padarysime šiek tiek daugiau iteracijų į priekį, tarkime 30, tai sugrįžimo atgal negausime (**animacija**).

- Aišku, kad šis negrįžtamumas sąlygotas kompiuterio paklaidomis. Tačiau tos paklaidos yra labai mažos – 10^{-15} eilės. Todėl galime kalbėti apie **praktinį mikroskopinį negrįžtamumą**, nes realiose sistemose užtikrinti absoliutų konservatyvumą neįmanoma. Visuomet egzistuoja maži išoriniai trikdžiai, kurie sugadina sistemos konservatyvumą ir padaro ją mikroskopiškai negrįžtama.
- Kokia yra matematinė praktinio negrįžtamumo priežastis? Mes matėme, kad kepėjo atvaizdas charakterizuojamas dviem Liapunovo rodikliais –teigiamu ir neigiamu. Teigiamas rodiklis apibūdina sistemos **nestabilumą – dvi artimos trajektorijos eksponentiškai diverguoja**. Atvirkštinis kepėjo atvaizdas aprašo apgręžtą laike dinamiką, todėl jis turi tuos pačius Liapunovo rodiklius kaip ir tiesioginis tik su priešingais ženklais. Apgręžtame atvaizde x kryptimi fazinis tūris suspaudžiamas o y kryptimi – ištempiamas. Todėl **atvirkštiniam atvaizdui taip pat būdingas nestabilumas – dvi jo artimos trajektorijos taip pat eksponentiškai diverguoja**. Būtent šis nestabilumas lemia praktinį mikroskopinį negrįžtamumą. Nedidelės (kompiuterinės) paklaidos eksponentiškai greitai užauga ir sistema negrįžta į pradinę būseną.
- Taigi **praktinio negrįžtamumo priežastis yra sistemos jautrumas pradinėms sąlygoms – drugelio efektas**. Eksponentinis jautrumas pradinėms sąlygoms yra pagrindinis chaoso požymis. Tad galima teigti, jog **praktinis mikroskopinis negrįžtamumas yra sąlygotas chaosu**.

Arnoldo katino atvaizdas

- Pademonstruosime aprašytų rezultatų universalumą dar vienu antros eilės konservatyviu atvaizdu – Arnoldo katino atvaizdu:



- Šio atvaizdo Liapunovo rodikliai yra:

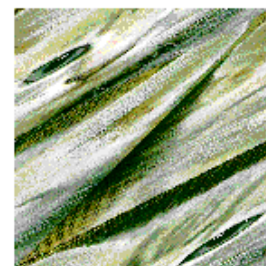
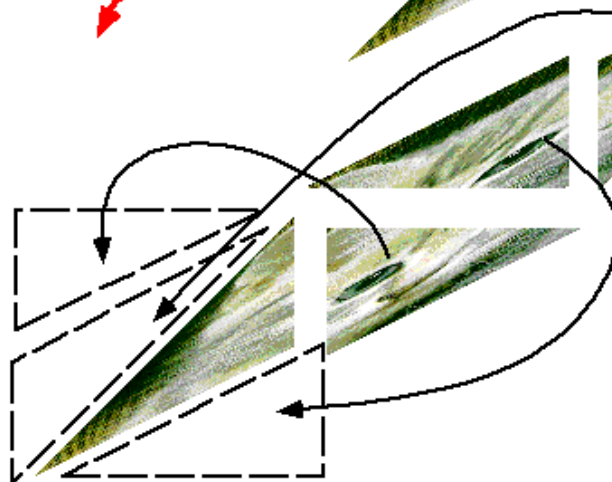
$$\lambda_+ = \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_- = \ln \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

- Šis atvaizdas yra įdomus tuo, kad čia fazinio ploto tempimo ir suspaudimo kryptis nesutampa su x ir y ašių kryptimis.

- Atvirkštinė šio atvaizdo transformacija yra tokia:

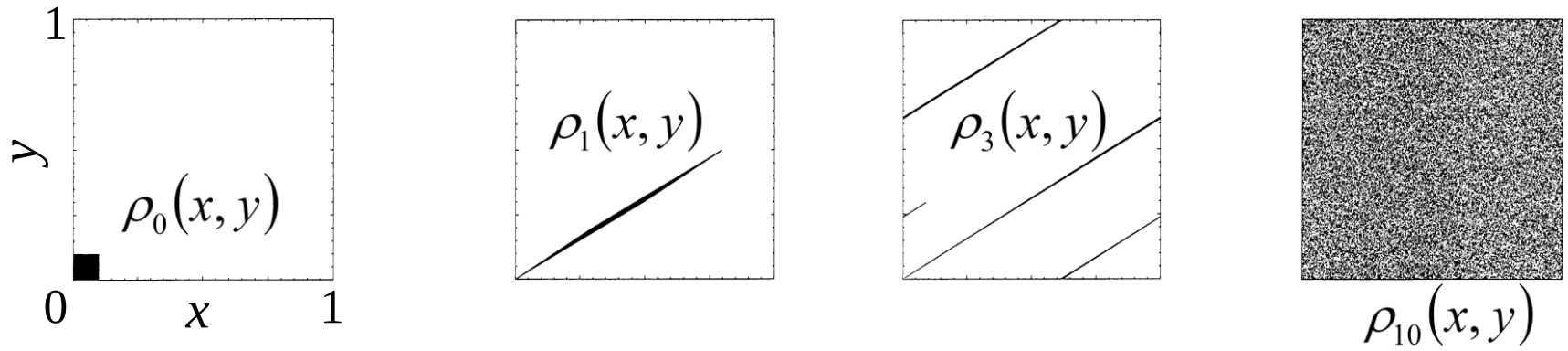
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{n+1} \mod 1$$

- Arnoldo katino atvaizdo animacija:

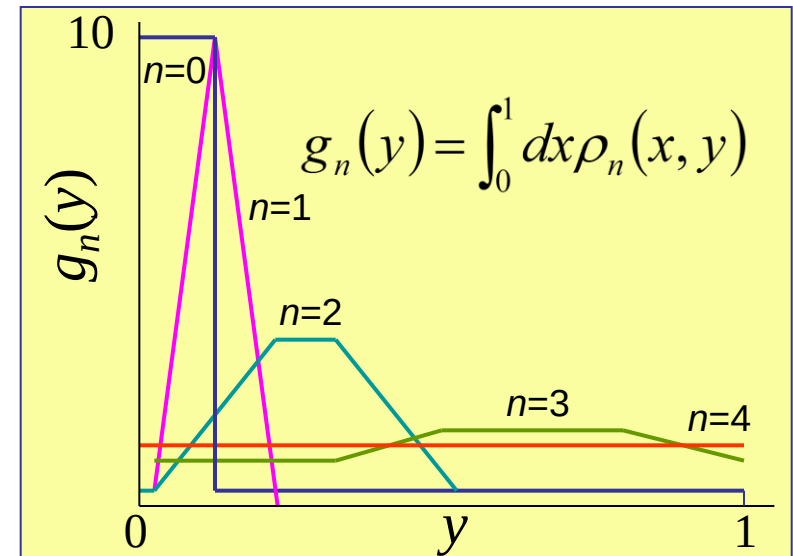
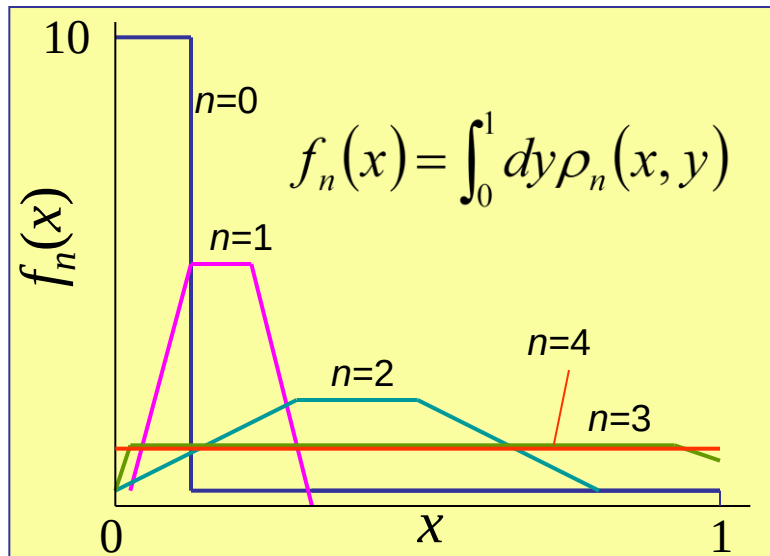


Paprasti matematiniai chaoso modeliai (XXIII)

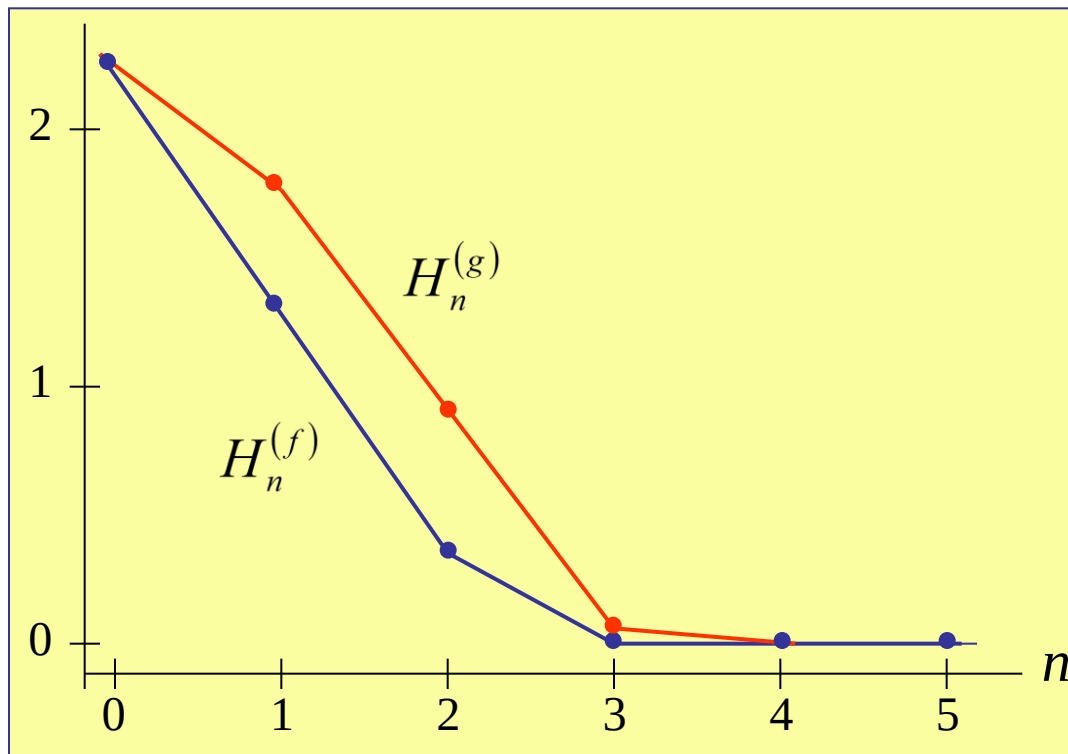
- Šis atvaizdas taip pat pasižymi praktiniu mikroskopiniu negrįžtamumu (**animacija**):



- Dabar x ir y ašys nesutampa su fazinio tūrio tempimo ir suspaudimo kryptimis, jis tempiamas ir suspaudžiamas kampu atžvilgiu šių ašių. Vis dėlto tankio funkcijos $\rho_n(x, y)$ projekcijos į x ir y ašis – $f_n(x)$ ir $g_n(y)$ – konverguoja prie pusiausvyros žymiai greičiau, negu pusiausvyrą pasiekia pati tankio funkcija $\rho_n(x, y)$.



- Taigi **projekcijos pasiekia pusiausvyrą žymiai anksčiau, negu įvyksta fazinių taškų išsimaišymas po visą fazinę erdvę. Charakteringas laikas, per kurį pusiausvyrą yra pasiekama, yra lygus atvirkštiniam teigiamam Liapunovo rodikliui**. Tas laikas beveik nepriklauso nuo to kuria kryptimi skaičiuojama tankio funkcijos projekcija, svarbu kad ta projekcija nesutaptų su fazinio tūrio suspaudimo kryptimi (stabilia kryptimi).
- Projekcijų $f_n(x)$ ir $g_n(y)$ artėjimą prie pusiausvyros dar galima pademonstruoti atitinkamų entropijų funkcijų (H-funkcijų) dinamika:

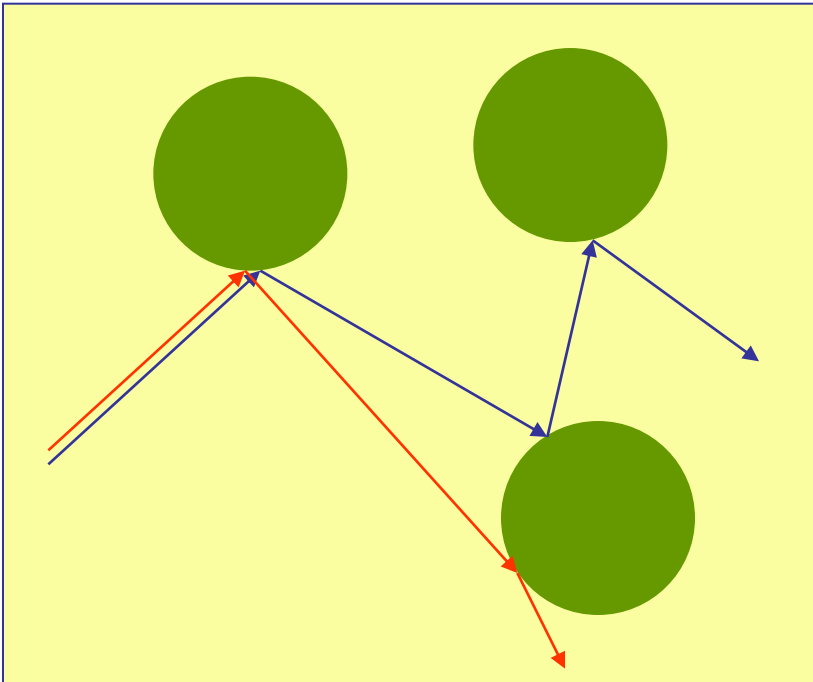


$$H_n^{(f)} = \int_0^1 dx f_n(x) \ln f_n(x)$$

$$H_n^{(g)} = \int_0^1 dy g_n(y) \ln g_n(y)$$

Paprasti matematiniai chaoso modeliai (XXV)

- Taigi matome, kad negrįžtamą elgesį galime gauti griežtai deterministinėje dinaminėje sistemoje, jeigu pereiname prie jos **užgrubinto aprašymo** – vietoje pilnos tankio funkcijos, apibrėžtos visų kintamųjų fazinėje erdvėje, naudojame jos projekciją, t.y. vidurkiname ją pagal tam tikrą dalį dinaminių kintamųjų.
- Būtina negrįžtamo dinaminių sistemų elgesio sąlyga yra chaosas – eksponentinis artimų trajektorijų prasiskyrimas. Belieka tik aptarti, kaip atsiranda chaosas dujų modelyje. **Chaosas dujose atsiranda dėl molekulių dūžių.** Pasižiūrėkime kaip elgiasi dvi artimos trajektorijos, kai dalelė atsispindi nuo išbarstytų erdvėje sferų:



- Nesunku įsitikinti, kad čia dvi artimos trajektorijos prasiskiria eksponentiškai greitai, tad molekulių judėjimas yra chaotinis. Todėl galima tikėtis, kad šiame skyriuje pateikti paprasti dinaminio chaoso modeliai bent filosofiskai paaiškina negrįžtamumo priežastis realiose dujose. **(animacija)**